توانا بود هر که دانا بود

وزارت فرهنگ

کتاب هندسه

برای سال چهارم دبیرستانها

۱۳۲۰

چاپخانهٔ فردوسی

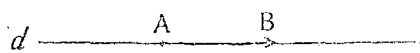
بخش نخست

ُبردار ـ آسه ـ پاره آسه

۳۷۶ - تعریف ُبردار ـ چنانکه میدانیم (اصل ۱/ه) هر دو نقطهٔ A و B روی یك خط راست d دوسو را نشان می‌دهند (AB) و (BA) در حال نخست A **آغاز** و B **انجام** و در حال دوم B آغاز و A انجام می باشد.

پاره خط AB که روی آن سوئی مانند (AB) یا (BA) را برگزیده باشیم **ُبردار** نامیده میشود.

در حال نخست می‌نویسیم $\overrightarrow{AB}$ و آنرا چنین می‌نمائیم (پ۲۹۹)

d A B

پ ۲۹۹

و در حال دوم می‌نویسیم $\overrightarrow{BA}$ و آنرا چنین می‌نمائیم (پ ۳۰۰)

d A B

پ ۳۰۰

۳۷۷ ـ از روی تعریف بالا روشن است که هر بردار مانند AB دارای نخستینه های زیر است :

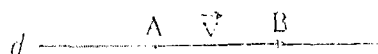
۱ ـ آغاز A

۲ ـ راستای خطی که بردار روی آن جا دارد و ما آنرا **جایگاه** بردار می‌نامیم .

۳ ـ سوی (AB)

٤ ـ اندازه درازای پاره خط AB که بایك یکهٔ درازاسنجیده میشود وآن عددی‌است حسابی مانند p و **بزرگی** $\overrightarrow{AB}$ نامیده میشود و می نویسند :

$$p = |\overrightarrow{AB}|$$

d ——— A $\vec{V}$ B ———

پ ۳۰۱

وارون ـ اگر این چهار نخستینه در دست باشد بردار را می‌توانیم بدست آوریم .

گاهی نیز بردار $\overrightarrow{AB}$ را تنها بایك حرف که روی آن نشانه (→) است نمایش می دهند و مینویسند $\vec{V}$ اگر بزرگی برداری برابر صفر باشد آن بردار را بردارصفر گویند .

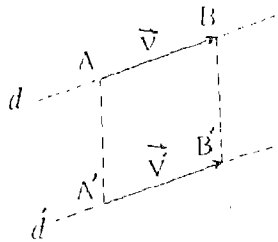
آغاز وانجام چنین برداری روی‌هم جاداشته و راستا وسوی این بردار دلخواه است .

۳۷۸ ـ تعریف ـ دو بردار را برابر گویند اگر :

۱ ـ دارای یك راستا

۲ ـ دارای یك سو

۳ ـ دارای یك بزرگی

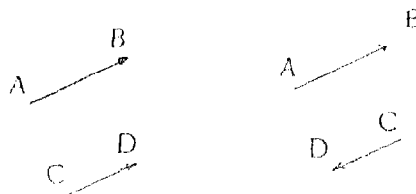
باشند یا بگفته دیگر اگر در آنها تنها نقطه های آغاز یکی نباشد (پ۳۰۲)

پ ۳۰۲

اگر دو بردار $\overline{AB} = \vec{V}$ و $\overline{A'B'} = \vec{V'}$ با هم برابر باشند می نویسیم :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

۳۷۹ - ورزش - استوار کنید که اگر دو بردار $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ باهم برابر باشند بیکر ABB'A' متوازی الاضلاع است (پ۳۰۲)

۳۸۰ - تعریف - برداری که بزرگی آن برابر بایکه درازا است **بردار یکه** نامیده میشود .

۳۸۱ - سنجش بردار هائی که دارای یك راستا میباشند -
اگر دو بردار $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ بیك راستا باشند میتوانیم هم بزرگی

پ ۳۰۳ پ ۳۰٤

یکی ازآنهارا بابزرگی دیگری وهم‌سوی یکی را باسوی دیگری

بسنجیم باینکه نسبت آنهارا بایك عددی جبری نمایش دهیم . اندازه حسابی این عدد جبری نسبت بزرگی های این دو بردار به یکدیگر بوده و نشانه آن $(+)$ است اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ دارای یك سو باشند (پ۳۰۳) و $(-)$ است اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ دارای دوسو باشند (پ۳۰٤)
پس اگر اندازه حسابی عدد جبری x را چنین بنمائیم $|x|$

یا داریم :

$$\text{I}\begin{cases}\dfrac{AB}{CD} = |x| \\ (AB) = (CD)\end{cases}$$

پس خواهیم داشت .

$$\text{II}\begin{cases}\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = x \\ x > 0\end{cases}$$

یا داریم :

$$\text{I}'\begin{cases}\dfrac{AB}{CD} = |x| \\ (AB) = -(CD)\end{cases}$$

پس خواهیم داشت

$$\text{II}'\begin{cases}\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = x \\ x < 0\end{cases}$$

و بوارون اگر بستگی‌های II یا II' را داشته باشیم بستگی‌های

I یا I' را خواهیم داشت .

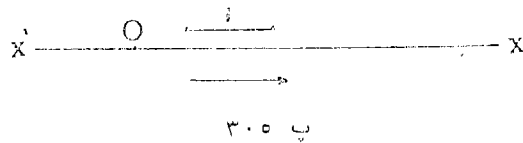
بستگی $x = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ را چنین نیز می‌نویسند

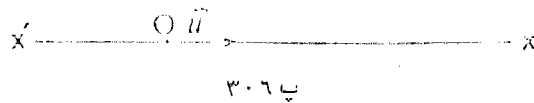
$$\overrightarrow{AB} = x \times \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \times x$$

پس $x \times \overrightarrow{CD}$ یا $\overrightarrow{CD} \times x$ برداری است براستای بردار $\overrightarrow{CD}$ و نسبت آن به این بردار همان عدد جبری x است .

۳۸۳ - آسه (محور) - هر خط راستی که در روی آن یك نقطه بنام **خاستگاه** و یك سو و یك یکه درازا برگزیده باشیم **آسه** نامیده میشود (پ۳۰۵)

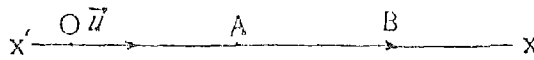
پس در روی هر آسه ای بردار یکه ای مانند $\vec{u}$ می توان

پ ۳۰۵

یافت که آغاز آن همان خاستگاه آسه و سوی آن همان سوی آسه باشد (پ۳۰۶)

پ۳۰۶

وبوارون هر بردار یکه‌ای مانند $\vec{u}$ می تواند یك آسه را نشان دهد از اینرو آسه را می توانیم با یك بردار یکه که در میان کمانه (پرانتز) جا دارد بنمائیم مانند $(\vec{u})$ و $(\vec{v})$

(می‌خوانیم آسه u و آسه v)

۳۸۳ - پاره آسه - اگر $\overrightarrow{AB}$ روی $(\overrightarrow{u})$ جا داشته باشد این بردار را پاره آسه گویند (پ۳۰۷)

$$x' \quad O\,\overrightarrow{u} \quad A \quad B \quad x$$

پ ۳۰۷

اگر $\overline{AB}$ را با $\overrightarrow{u}$ سنجیده و داشته باشیم

$$\overline{AB} = p\,.\,\overrightarrow{u}$$

عدد جبری p را اندازه جبری $\overline{AB}$ می گویند و آنرا چنین می نمایند.

$$p = \overline{AB}$$

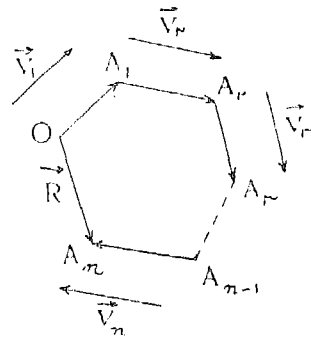
پس می توانیم بنویسیم:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \times \overrightarrow{u}$$

(و اگر $\overrightarrow{p}$ برداری باشد روی $(\overrightarrow{u})$ اندازه جبری آنرا چنین می‌نمایند $\overline{p}$)

وارون - اگر عدد جبری $\overline{AB}$ در دست باشد می توانیم در روی $(\overrightarrow{u})$ برداری‌مانند $\overrightarrow{AB}$ یا برابر با آن چنان پیدا کنیم که اگر آنرا با $\overrightarrow{u}$ بسنجیم عدد جبری $\overline{AB}$ بدست آید از اینرو بجای آنکه در روی $(\overrightarrow{u})$ با $\overrightarrow{AB}$ سرو کار داشته باشیم بیشتر بااندازه جبری آن که $\overline{AB}$ است سرو کار خواهیم داشت.

۳۸٤ - برآیند چندبردار - اگر چند بردار مانند $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$

و $\vec{V_n}$ و . . . . . داشته باشیم می‌توانیم همیشه ازیك نقطه دلخواه مانند O برداری مانند $\overrightarrow{OA_1}$ برابر با $\vec{V_1}$ و $\overrightarrow{A_1A_2}$ را از نقطه A_1 برابر با

پ ۳۰۸

V_2 و... و $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ را ازنقطه A_{n-1} برابر با $\vec{V_n}$ بکشیم (پ ۳۰۸)

$\vec{R} = \overrightarrow{OA_n}$ را برآیند (منتجه) بردارهای $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ و.... و $\vec{V_n}$ می گویند و می‌نویسند

$$\vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} + \cdots + \vec{V_n}$$

۳۸۵- قضیه - اگر $\vec{R} = \overrightarrow{OA_n}$ برآیند بردارهای $\vec{V_1} = \overrightarrow{OA_1}$ و $\vec{V_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$ و....و $\vec{V_n} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ و $\vec{R_1} = \overrightarrow{O_1B_n}$ برآیند بردارهای $\vec{V_1} = \overrightarrow{O_1B_1}$ و $\vec{V_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$ و....و $\vec{V_n} = \overrightarrow{B_{n-1}B_n}$ باشد خواهیم داشت

$$\vec{R} = \vec{R_1}$$

برهان - چون داریم :

$$\vec{V_1} = \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{O_1B_1}$$

پس پیکر $OA_1B_1O_1$ متوازی الاضلاع است (ورزش ۳۷۹) وخواهیم داشت

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$$

و بهمین گونه استوار می‌شود :

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$$

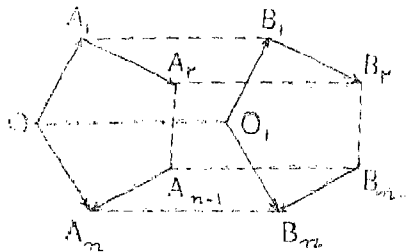
و در پایان

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \dots = \overrightarrow{A_nB_n}$$

و از اینجا چنین بر می‌آید که پیکر $OO_1B_nA_n$ نیز متوازی الاضلاع است پس خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{O_1B_n}$$

ویا

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_1} \qquad (پ ۳۰۹)$$

پ ۳۰۹

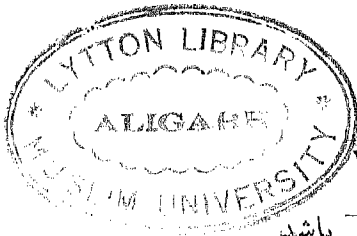
۳۸۶ - ورزش - استوار کنید که برآیند $\overrightarrow{V_1}$ و $(\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3})$ وهمچنین برآیند $(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2})$ و $\overrightarrow{V_3}$ همان برآیند بردار های $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$ است بایگفته دیگر :

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} + (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) + \overrightarrow{V_3}$$

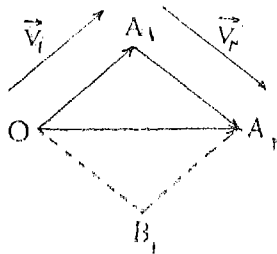
۳۸۷ - قضیه - اگر داشته باشیم:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} + \dots + \overrightarrow{V_n}$$

میتوانیم $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$ و .... و $\overrightarrow{V_n}$ را در برابری بالا بهر گونه که بخواهیم جابجا کنیم.

برهان ۱ - استوار میکنیم که

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}$$

زیرا اگر $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{OA_1}$ و $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$ باشد

پیا ۴۱۰

پیکر $OA_1A_2B_1$ متوازی‌الاضلاع است (ورزش ۳۷۹) پس:

$$\overrightarrow{B_1A_2} = \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{V_1}$$

و از آنجا خواهیم داشت.

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1A_2}$$

یا

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}$$

از (ورزش ۳۸۶) بر می‌آید که :

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} + (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) + \overrightarrow{V_3}$$

و از آنچه در بالا استوار کردیم میتوان در آورد :

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} + (\overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2}) =$$

$$(\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}) + \overrightarrow{V_3} = (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) + \overrightarrow{V_1} =$$

$$\overrightarrow{V_3} + (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = (\overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2}) + \overrightarrow{V_1}$$

و از آنجا

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2} =$$

$$\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_1} =$$

$$\overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}$$

۲ ـ بهمین گونه میتوان قضیه بالا را برای هر چندبردار که داشته باشیم استوار نمود .

۳۸۸ - تعریف - اگر برآیند $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ برابر باصفر باشد گوئیم از این دوبردار یك **جفت** پدیدآمده است (پ۳۱۱)

اگر $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ یك جفت پدید آورند بآسانی می‌توان دید

که این دو بردار دارای یك راستا و یك بزرگی بوده ولی دارای

پ ۳۱۱

دو سو می‌باشند .

۳۸۹ - تعریف - اگر داشته باشیم :

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

هر یك از $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را فزونی $\vec{R}$ از دیگری می گویند و می‌نویسند .

$$\vec{V}_1 = \vec{R} - \vec{V}_2$$

و یا

$$\vec{V}_2 = \vec{R} - \vec{V}_1$$

۳۹۰ - قضیه شال - اگر روی $(\vec{u})$ چند نقطهٔ A و B و C و ... و K و L را داشته باشیم همواره خواهیم داشت :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0$$

برهان ۱ - اگر تنها دو نقطهٔ A و B را روی $(\vec{u})$ داشته باشیم

روشن است که از روی تعریف اندازه جبری یك پاره آسه خواهیم داشت :

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0$$

۲ ـ اگر سه نقطهٔ A و B و C روی $(\overrightarrow{u})$ داشته باشیم

الف ـ (AB) = (BC) (پ ۳۱۲)

O $\vec{u}$ A B C

پ ۳۱۲

پس از روی اصل های (ه) خواهیم داشت .

$$(AC) = (AB) = (BC)$$

یابگفته دیگر $\overrightarrow{AC}$ و $\overline{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ دارای یك‌سو می‌باشند و از آنجا عددهای جبری $\overline{AC}$ و AB و $\overline{BC}$ دارای یك‌نشان خواهند بود ولی از سوی دیگر داریم :

$$AC = AB + BC$$

(کتاب نخست شماره ۱۵)

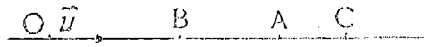
پس روشن است که خواهیم داشت :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

و یا

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

ب - $(BA)=(AC)$ (پ ۳۱۳)

$O\ \vec{u}$ B A C

پ ۳۱۳

پس از روی آنچه که در بالا گفتیم در اینجا خواهیم داشت

$$\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}$$

واز آنجا
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

ج - $(AC)=(CB)$ (پ ۳۱٤)

$O\ \vec{u}$ A C B

پ ۳۱٤

در اینجا باز خواهیم داشت :

$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$$

و یا
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

۳ ـ برای آنکه قضیه بالارا برای هر چندنقطه که داشته باشیم استوار کنیم بسنده است استوار نمود اگر این قضیه برای ($n-1$) نقطه A و B و C و . . . و K درست باشد برای n نقطه A و B و C و . . . و K و L نیز درست است .

زیرا اگر داشته باشیم

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{KA}=0$$

چون

$$\overline{LK}+\overline{KL}=0$$

پس خواهیم داشت

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{KA}+\overline{LK}+\overline{KL}=0$$

و یا

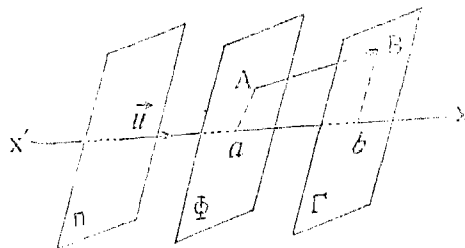
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{KL}+\overline{LK}+\overline{KA}=0$$

و چون :

$$\overline{LK}+\overline{KA}=\overline{LA}$$

پس :

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{KL}+\overline{LA}=0$$

۳۹۱ - تصویر - اگر $(\overrightarrow{u})$ وهامن π را داشته باشیم که با هم همرو(موازی) نباشند چنانچه از نقطهٔ A هامن Φ را همروباهامن π بکشیم و a نقطهٔ برخورد این هامن با $(\overrightarrow{u})$ باشد a را **تصویر**

پ ۳۱۵

(همروبا π) نقطه A روی $(\overrightarrow{u})$ گویند (پ۳۱۵)

اگر ($\overrightarrow{u}$) ستونی (عمود) برهامن π باشد a را **تصویر راست گذر** (قائم) A وگرنه a را **تصویر گرایای** A (مایل) خوانند.

$\overrightarrow{ab}$ را تصویر $\overrightarrow{AB}$ روی ($\overrightarrow{u}$) گویند اگر a تصویر A و b تصویر B باشد یا بگفته دیگر تصویر (همرو با π) یك بردار روی ($\overrightarrow{u}$) برداری است که آغازش تصویر (همرو با π) آغاز $\overrightarrow{AB}$ و انجامش تصویر (همرو با π) انجام این بردار روی این آسه باشد.

وچون $\overrightarrow{ab}$ پاره آسه است اندازه جبری آن $\overline{ab}$ خواهد بود.

۳۹۳ - قضیه تصویرها - اگر $\overrightarrow{R}$ برآیند $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ و .... و $\overrightarrow{V_n}$ باشد اندازه جبری تصویر (همرو با π) $\overrightarrow{R}$ روی ($\overrightarrow{u}$) برابر است با مجموع اندازه های جبری تصویرهای (همرو با π) $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ و .... و $\overrightarrow{V_n}$ روی ($\overrightarrow{u}$)

برهان - اگر داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_1} \text{ و } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{V_2} \text{ و .... و } \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{V_n}$$

خواهیم داشت

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{AL}$$

چنانچه a و b و ... و k و l تصویر های (همرو با π) A و B و .... و K و L روی ($\overrightarrow{u}$) باشند

از روی قضیه شال میتوانیم بنویسیم:

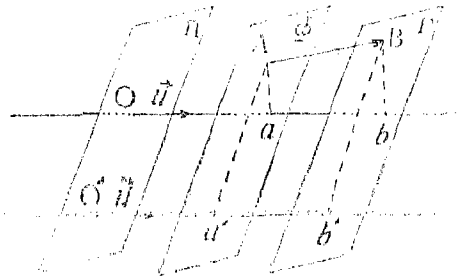
$$\overline{ab}+\overline{bc}+\cdots+\overline{kl}+\overline{la}=0$$

پس

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\cdots+\overline{kl}=\overline{al}$$

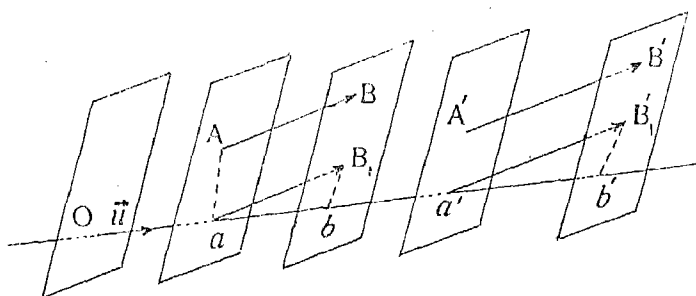
۳۹۳ - ورزش - اگر $\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{a'b'}$ تصویر های $\overrightarrow{AB}$ روی آسه های $(\overrightarrow{u})$ و $(\overrightarrow{u'})$ باشند استوار کنید :

۱ - $\overline{ab}=\overline{a'b'}$ اگر داشته باشیم $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u'}$

۲ - $\overline{ab}=-\overline{a'b'}$ اگر داشته باشیم $\overrightarrow{u}=-\overrightarrow{u'}$ (پ ۳۱۶)

پ ۳۱۶

۳۹۴ - اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ بیك راستا باشند و $\overline{ab}$ و $\overline{a'b'}$ اندازه های جبری تصویر های (همروبا =) این بردارها روی $(\overrightarrow{u})$ باشند خواهیم داشت .

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A'B'}}=\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}}$$

برهان- اگر $\overrightarrow{aB_1}$ را برابر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{a'B'_1}$ را برابر $\overrightarrow{A'B'}$ بگیریم از قضیه (۲۹٤) میتوان درآورد که تصویر $\overrightarrow{aB_1}$ همان $\overrightarrow{ab}$ و تصویر $\overrightarrow{a'B'_1}$ همان $\overrightarrow{a'b'}$ خواهد بود و چون خط bB_1 باخط $b'B'_1$ همرواست (قضیه ۲۹۲) پس دو سه بر abB_1 و $a'b'B'_1$ دارای پهلوهای همرو

پ ۳۱۷

بوده همانند میشوند (قضیه ۲٥٦) و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{aB_1}{a'B'_1} = \frac{ab}{a'b'}$$

و یا

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{ab}{a'b'}$$

و

$$\widehat{B_1ab} = \widehat{B'_1a'b'}$$

پس اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ دارای یک سو باشند $\overrightarrow{aB_1}$ و $\overrightarrow{a'B'_1}$ دارای یک سو بوده ناچار $\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{a'b'}$ نیز دارای یک سو خواهند بود (قضیه ۱۰۹)

واگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ دارای دو سو باشند $\overrightarrow{aB_1}$ و $\overrightarrow{a'B'_1}$ نیز دارای

دو سو بوده و ناچار $\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{a'b'}$ هم دارای دوسو میشوند از اینرو همیشه می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A'B'}}=\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{a'b'}}$$

و یا :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A'B'}}=\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}}$$

۳۹۵ - ورزش - استوار کنید اگر دو بردار را روی $(\overrightarrow{u})$ همرو با ... تصویر کنیم :

۱ - چنانچه این دو بردار برابر باشند اندازه های جبری تصویرهای آنها با هم برابر خواهند بود .

۲ - چنانچه این دو بردار یك جفت را پدید آورند مجموع اندازه‌های جبری تصویر های آنها برابر باصفر خواهد بود .

۳۹۶ - قضیه - اگر $\overline{AB}$ روی $(\overrightarrow{V})$ جا داشته و $\overline{ab}$ و $\overrightarrow{V'}$ تصویر های $\overline{AB}$ و $\overrightarrow{V}$ روی $(\overrightarrow{u})$ باشند خواهیم داشت :

$$\overline{ab}=\overline{AB}\times\overline{V'}$$

و

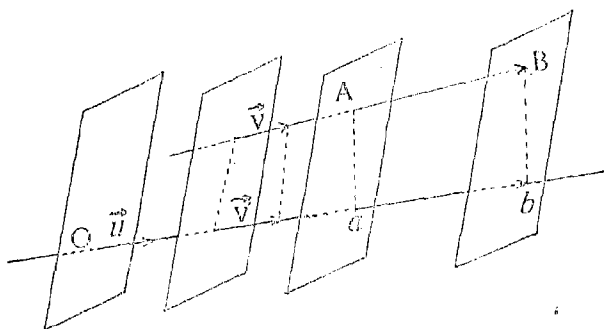
$$\overrightarrow{ab}=\overline{AB}\times\overrightarrow{V'}$$

برهان - از روی قضیه بالا داریم :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{V}}=\frac{\overline{ab}}{\overline{V'}}$$

و یا

$$\overline{AB}=\frac{\overline{ab}}{\overline{V'}}$$

و یا

$$\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{V'}}$$

پ ۳۱۸

و از آنجا

$$\overline{ab} = \overline{AB} \times \overline{V'}$$

یا

$$\overrightarrow{ab} = \overline{AB} \times \overrightarrow{V'}$$

بخش دوم

نسبت ناهمساز

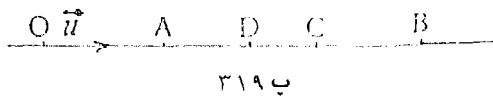
بخش و نسبت همساز (توافقی)

۳۹۷ - تعریف - اگر روی ($\overrightarrow{u}$) چهار نقطه A و B و C و D را داشته باشیم :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

را نسبت ناهمساز این چهار نقطه گویند (پ ۳۱۹)

O $\vec{u}$ A D C B

پ ۳۱۹

و آنرا چنین می‌نمایند :

$$(ABCD)$$

پس داریم .

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

ولی می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

پس

$$(ABCD) = (BADC)$$

و نیز میتوان نوشت

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

پس :

$$(ABCD) = (CDAB)$$

و بهمین گونه خواهیم داشت

$$(BADC) = (DCBA)$$

پس

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$

۳۹۸ - تعریف - اگر روی $(\overrightarrow{u})$ چهارنقطه A و B و C و D را بدانسان داشته باشیم

که $$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = -۱$$

یا $$(ABCD) = -۱$$

می‌گوئیم ازاین چهارنقطه یك بخش **همساز** پدیدآمده است و C و D (یا A و B) را نسبت به A و B (یا C و D) **جفت‌همساز** گویند .

به‌آسانی میتوان دید که اگر C و D نسبت به A و B جفت همساز باشند یکی ازاین دو نقطه روی پاره خط AB ودیگری بیرون این پاره خط جا دارد .

اگر $(ABCD) = -۱$ ونقطهٔ C میانگاه AB باشدیابگفته‌دیگر داشته باشیم .

$$\overline{AC} = -\overline{BC}$$

از برابری :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=-1$$

بر می‌آید

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=-1$$

و از آنجا

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=1$$

و این نمی‌شود مگر آنکه دوری نقطه D از A و B بی پایان باشد . (پ۳۲۰)

وارون - اگر دوری نقطه D در روی ($\overrightarrow{u}$)

پ ۳۲۰

ازدونقطهٔ A و B بی‌پایان باشد (ازهرسو که‌بخواهیم) یابگفته دیگر اگر داشته باشیم :

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=1$$

جفت همساز D نسبت به دونقطه A و B نقطه‌ای‌است مانند C که میانگاه پاره خط AB است زیرا داریم .

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=-1$$

و یا

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = -۱$$

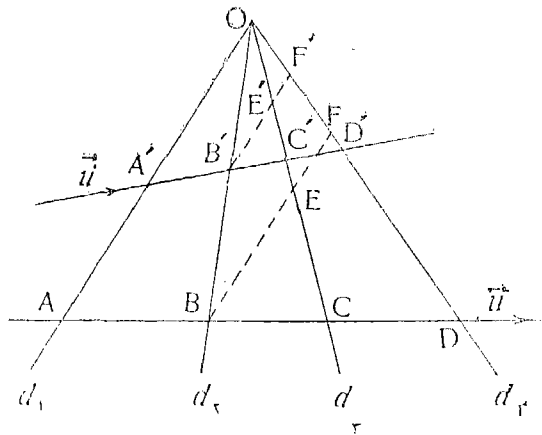
و از آنجا بدست می‌آید

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -۱$$

۳۹۹ ـ اگر در یك هامن چهار خط راست $d_۱$ و $d_۲$ و $d_۳$ و $d_۴$ دریك نقطه O همرس باشند و اگر A و B و C و D نقطه های برخورد $(\overrightarrow{u})$ با این خط هاو A' و B' و C' و D' نقطه‌های برخورد آسه دلخواه $(\overrightarrow{u'})$ با این چهار خط باشند همواره داریم:

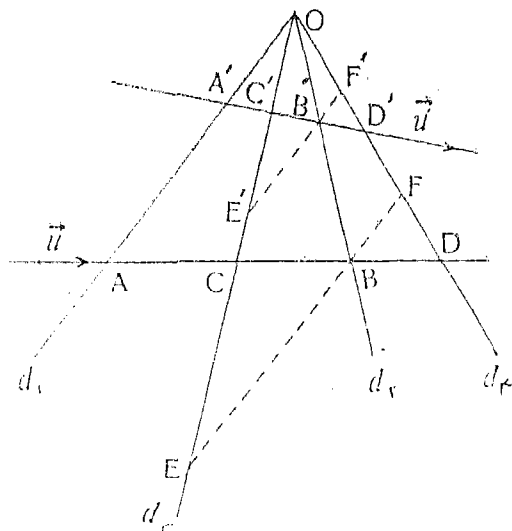
$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

برهان ـ از نقطه B خطی همرو با $d_۱$ می کشیم این خط بدو خط $d_۳$ و $d_۴$ در دو نقطهٔ E و F برمی‌خورد (فرع ۱۰۶)

همچنین از نقطهٔ B' خطی همرو با $d_۱$ می کشیم. این خط بدو خط $d_۳$ و

پ ۳۲۱

$d_۴$ در دو نقطهٔ E' و F' برمی‌خورد ازهمانندی سه برهای CAO و CBE بدست می آید.

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AO}{BE}$$

ولی اگر داشته باشیم $(AC)=(BC)$ خواهیم داشت $(OC)=(EC)$
(اصل د / ٤) یا بگفته دیگر اگر C در بیرون پاره خط AB باشد C نیز در
در بیرون پاره خط OE خواهد بود و از آنجا O و E در یك کنار $\overrightarrow{(u)}$ جا دارند
پس $(BE)=(AO)$ (تعریف ۱۰۸) (پ ۳۲۱)
و اگر داشته باشیم $(AC)=(CB)$
خواهیم داشت $(OC)=(CE)$
زیرا چون A و O و C در یك کنار خط BE جا دارند پس نقطهٔ E بیرون
پاره خط CO خواهد بود و چون نقطه های C و B و E در یك کنار خط AO
جا دارند پس نقطهٔ O بیرون پاره خط CE خواهد بود از آنجا نقطهٔ C روی پاره .

پ ۳۲۲

خط OE جا دارد (پ ۳۲۲) پس O و E در دو کنار $\overrightarrow{(u)}$ بوده و از آنجا
خواهیم داشت .

$$(AO) = -(BE)$$

از اینرو می توانیم درهمه حال بنویسیم

$$(۱)\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{BE}}$$

همچنین ازهمانندی سه‌برهای DAO و DBF بدست می‌آید .

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BE}$$

باز دراینجا میتوان دید که داریم

$$(۲)\quad \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{BF}}$$

ازبخش کردن دوبرابری (۱) و (۲) بیکدیگر خواهیم داشت .

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{BE}}$$

و یا

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{BE}}$$

و بهمین گونه استوار میشود که :

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}} : \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{B'F'}}{\overrightarrow{B'E'}}$$

ولی از روی (قضیه ۲۰۸) داریم

$$\frac{BF}{BE} = \frac{B'F'}{B'E'}$$

و باسانی استوار میشود که دراین جا نیز می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{BE}}=\frac{\overrightarrow{B'F'}}{\overrightarrow{B'E'}}$$

پس :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}}:\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}}$$

و یا

$$(ABCD)=(A'B'C'D')$$

۴۰۰ — تعریف — اگر چهار خط همرس d_1 و d_2 و d_3 و d_4 داشته باشیم و اگر $(\overrightarrow{u})$ به این چهار خط در نقطه های A و B و C و D بر بخورد (ABCD) بجای $(\overrightarrow{u})$ بستگی ندارد و ازاینرو (ABCD) **را نسبت ناهمساز** چهار خط d_1 و d_2 و d_3 و d_4 می گویند و آنرا چنین می‌نمایند .

$$(d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ )$$

هر گاه داشته باشیم

$$(d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ )=-1$$

گوئیم از چهارخط d_1 و p_3 و d_2 و d_4 **یک دسته همساز** پدید آمده است و خط های d_3 و d_4 (یا d_1 و d_2) را نسبت به خط های d_1 و d_2 (یا d_3 و d_4) **جفت همساز** می گویند .

۴۰۱ — قضیه — برای آنکه از چهار خط همرس یک دسته همساز درست شود بایسته و بسنده است که روی هر خط همرو بایکی از آنها سه خط دیگر این دسته دوپاره خط برابر یکدیگر پدید آورند.

برهان ـ بگردن دانش آموزان است .

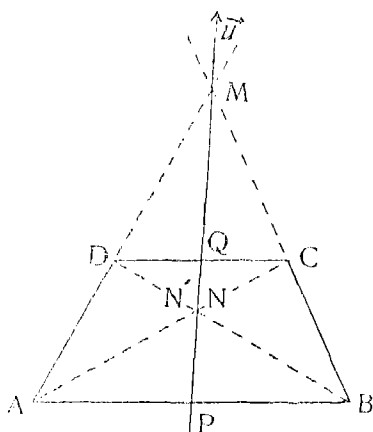
۴۰۲ — ورزش — جای هندسی نقطه هائی که نسبت دوریهای آنها از دو خط d_1 و d_2 برابر با k است دوخط d_3 و d_4 می باشد که با دو خط نخست همرس

بوده و با آنها یکدسته همساز پدید می آورند .

۴۰۳ — ورزش — نیمساز های گوشه هائی که از برخورد دو خط پدید می‌آیند با این دو خط یکدسته همساز پدید می‌آورند .

وارون — اگر در یك دسته همساز دو خط که نسبت بدو خط دیگر جفت همساز هستند بریکدیگر ستونی باشند این دو خط نیمساز های گوشه هائی هستند که از دوخط دیگر پدید آمده‌اند .

۴۰۴ - مسئله — در یك ذوزنقه نقطه برخورد خط هائی که‌بر دو ساق می‌گذرد ونقطه برخورد دو گوشه‌بر (قطر) ومیان گاه‌های دو پایه روی یك خط راست جا داشته و از آنها یك بخش همساز پدید می‌آید .

گشایش ۱ — اگر BC و AD دو ساق ذوزنقه و M نقطه بر خورد دو خط BC و AD و P میان پایه AB باشد خط MP از نقطه

پ ۳۲۳

Q میان پایه DC نیز خواهد گذشت (قضیه ۲۵۸)

اگر N نقطه‌بر خورد گوشه‌بر AC باخط MP باشداز همانندی دو سه بر NQC و NPA داریم :

$$\frac{NQ}{NP}=\frac{QC}{PA}$$

واگر 'N نقطهٔ بر خورد گوشه‌بر DB با MP باشد از همانندی دو سه بر N'QD و N'PB نیز خواهیم داشت :

$$\frac{N'Q}{N'P}=\frac{QD}{PB}$$

ولی

$$\frac{QC}{PA}=\frac{QD}{PB}$$

پس

$$\frac{NQ}{NP}=\frac{N'Q}{N'P}$$

وچون N و 'N روی پاره خط PQ جا دارند پس N روی 'N جا خواهد داشت از اینرو چهار نقطه M و N و P و Q روی یك خط راست جا دارند .

۲ ـ از همانندی دوسه بر MQC و MPB داریم :

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{PB}{QC}$$

و چون داشتیم

$$\frac{NP}{NQ}=\frac{PB}{QD}=\frac{PB}{QC}$$

پس

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{NP}{NQ}$$

ولی از کوژ بودن ذوزنقه برمی‌آید که M در بیرون پاره خط PQ و N روی پاره‌خط PQ جادارد از آنجا اگر روی PQ بردار یکه $\overrightarrow{u}$ را برگزینیم می‌توانیم بنویسیم

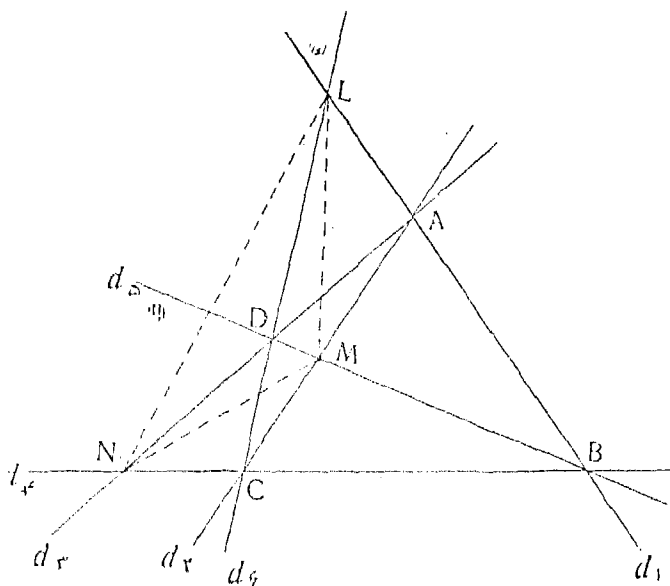
$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}=-\frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}}$$

یا

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}:\frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}}=-۱$$

۴۰۵ - تعریف ۱ - اگر چهار نقطهٔ A و B و C و D داشته باشیم که هیچ سه نقطه‌ای از آنها روی یك خط راست نباشند چنانچه این نقطه‌ها را دو بدو به یکدیگر به پیوندیم پیکری پدید می‌آید که آنرا چهار گوشه کامل می‌گویند. A و B و C و D را تارك‌ها و خط‌های $[AB]\equiv d_۱$ و $[AC]\equiv d_۲$ و $[AD]\equiv d_۳$ و $[BC]\equiv d_۴$ و $[BD]\equiv d_۵$ و $[CD]\equiv d_۶$ را پهلوهای **چهار گوشه کامل** گویند وهر دو پهلو که از یك تارك نگذشته باشند دوپهلوی روبرو نامیده می‌شوند مانند پهلوهای $d_۱\equiv[AB]$ و $d_۶\equiv[CD]$ یا $d_۲$ و $d_۵$ و یا $d_۳$ و $d_۴$ پس هر چهار گوشه کامل که دارای چهار تارك و شش پهلو می باشد باتار کهایش

نمایش داده می‌شود و می‌نویسند چهار گوشه کامل ABCD (پ۳۲٤)

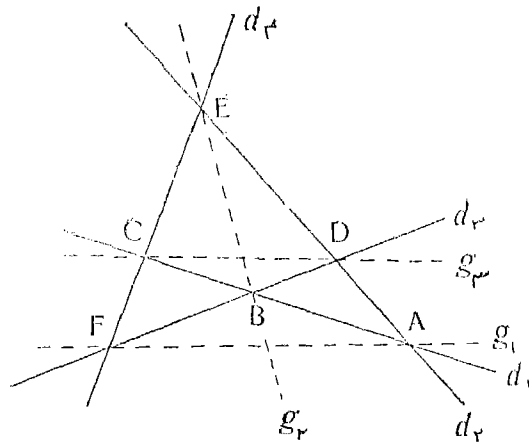
پ ۳۲٤

اگر داشته باشیم $L \equiv [d_1, d_6]$ و $M \equiv [d_2, d_5]$ و $N \equiv [d_3, d_4]$

L و M و N را نقطه های گوشه بر گویند و از این سه نقطه پیکری پدید می‌آید که آنرا سه‌گوشه (سه‌بر) گوشه بر چهار گوشه کامل گویند (پ۳۲٤)

۲ـ اگر چهار خط d_1 و d_2 و d_3 و d_4 داشته‌باشیم که‌هیچ‌سه‌تای از آنها همرس نباشند چنانچه نقطه های برخورد آنها را دو بدو بدست‌آوریم پیکری پدید می‌آید که آن را **چهاربر کامل** گویند چهار خط d_1 و d_2 و d_3 و d_4 را پهلو ها و شش نقطهٔ :

$A \equiv [d_1, d_2]$ و $B \equiv [d_1, d_3]$ و $C \equiv [d_1, d_4]$ و $D \equiv [d_2, d_3]$ و $E \equiv [d_2, d_4]$

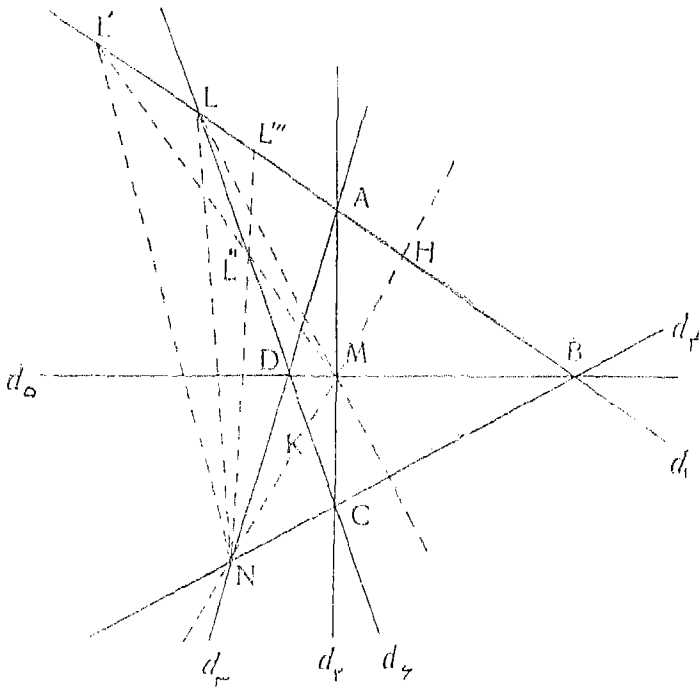
و $F\equiv[d_3, d_4]$ را شش تارك و هر دو تارك که روی يك پهلو نباشند مانند A و F یا B و E و یا C و D دو تارك روبروی چهار بر کامل نامیده می‌شود پس هرچهار بر کامل دارای چهار پهلو و شش تارك می‌باشد و آنرا با چهار پهلویش نمایش می دهند و می‌نویسند چهار بر کامل $d_1d_2d_3d_4$ (پ ۳۲۵)

اگر داشته باشیم $g_1\equiv[AF]$ و $g_2\equiv[BE]$ و $g_3\equiv[CD]$ سه‌خط g_1 و g_2 و g_3 راگوشه برهای چهار بر کامل گویند واز این خط ها پیکری پدید می‌آید که آنرا سه‌بر گوشه برچهاربر کامل گویند.

پ ۳۲۵

۴۰۹ - قضیه - روی هر پهلوی چهار گوشه کامل دو تارك و دونقطه برخورد این پهلو باپهلوهای سه گوشهٔ گوشهٔ بریك بخش همساز پدید می‌آورند.

برهان - اگر در چهار گوشه کامل ABCD قرار دهیم :

$d_1 \equiv [AB]$ و $d_2 \equiv [AC]$ و $d_3 \equiv [AD]$ و $d_4 \equiv [BC]$ و $d_5 \equiv [BD]$ و $d_6 \equiv [CD]$ و $L \equiv [d_1, d_6]$ و $M \equiv [d_2, d_5]$ و $N \equiv [d_3, d_4]$ دو پهلوی NL و ML سه گوشه قطری به پهلوی d_1 چهار گوشه کامل در L بر میخورند و پهلوی MN سه گوشه قطری پهلوی d_1 را در نقطه ای مانند H می برد باید استوار کنیم :

$$(ABHL) = -1$$

پ ۳۱۶

چنانچه L' جفت همساز H نسبت به A و B باشد داریم .

$$(1) \quad (ABHL') = -1$$

و از چهار خط $[AM] \equiv [AC] \equiv d_2$ و $[BM] \equiv [BD] \equiv d_5$ و $[HM] \equiv [MN]$ و $[L'M]$ یك دسته همساز پدید می آید .

پهلوی d_6 چهار گوشه کامل بچهار خط این دسته همساز در نقطه های C و D و K و L'' برمی خورد بدانسانکه داریم :

$$(CDKL'') = -1$$

از آنجا چهار خط $[CN] \equiv [BC] \equiv d_4$ و $[DN] \equiv [DA] \equiv d_3$ و $[KN] \equiv [NM]$ و $[L''N]$ یك دسته همساز درست می کنند و d_1 بچهار خط ایندسته همساز در نقطه های B و A و H و L''' برمی خورد پس خواهیم داشت :

$$(BAHL''') = -1$$

یا

$$(ABHL''') = -1 \qquad (2)$$

از روی بستگی های (۱) و (۲) روشن می شود که L''' روی L' جادارد از اینرو L'' که نقطهٔ برخورد سه خط [ML'] و [NL'''] و d_6 است نیز روی L' خواهد بود پس داریم :

$$L' \equiv [d_1, d_4] \equiv L$$

یابگفته دیگر L' همان L می باشد و بجای بستگی (۱) داریم :

$$(ABHL) = -1$$

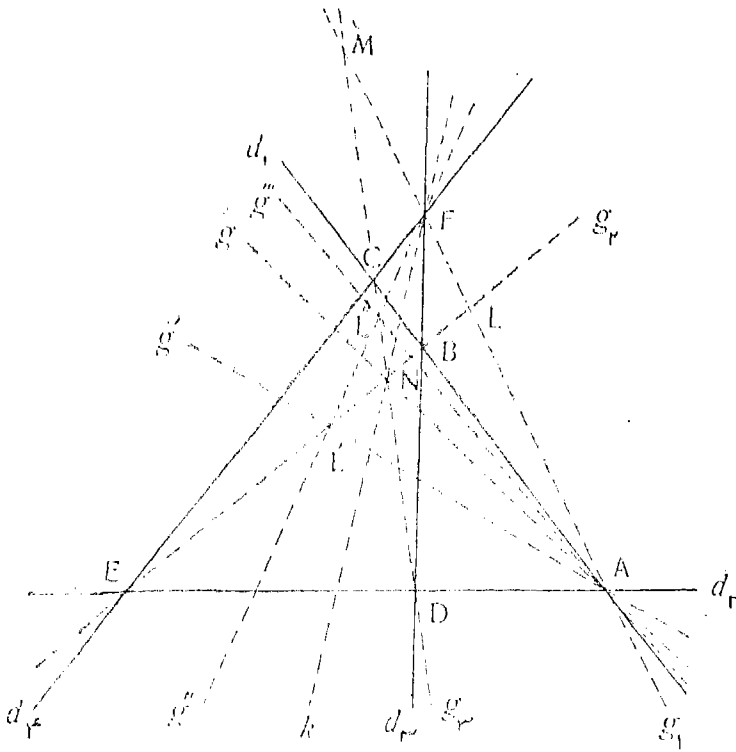
۴۰۷ – قضیه – در هر تارك یك چهار بر کامل دو پهلو و دو

خطی که ازاین تارك و تارکهای سه‌بر گوشه‌بر می گذرند یکدسته همساز پدید می‌آورند.

برهان - در چهار بر کامل $d_1\ d_2\ d_3\ d_4$ قرار می‌دهیم :

$A\equiv[d_1, d_2]$ و $B\equiv[d_1, d_3]$ و $C\equiv[d_1, d_4]$ و $D\equiv[d_2, d_3]$

و $E\equiv[d_2, d_4]$ و $F\equiv[d_3, d_4]$ و $g_1\equiv[AF]$ و $g_2\equiv[BE]$

و $g_3\equiv[CD]$ $L\equiv[g_1, g_2]$ و $M\equiv[g_1, g_3]$ و $N\equiv[g_2, g_3]$

پ ۳۲۷

دوخطی که تارك A چهاربررا به دوتارك L و M سه‌بر گوشه

پیوندد همان پهلوی g_1 این سه براست و اگر قرار دهیم
[AM] باید استوار کنیم :

$$(d_1 d_2 g g_1) = -1$$

چنانچه g' خطی باشد که از A بگذرد بدانسانکه :

$$(1) \quad (d_1 d_2 g g') = -1$$

از چهار نقطهٔ :

$$B = [d_1, d_2] = [d_1, g_2]$$
$$E = [d_2, d_4] = [d_2, g_2]$$
$$N = [g_2, g_2] = [g, g_2]$$
$$L' = [g', g_2]$$

یك بخش همساز پدید می‌آید و خواهیم داشت

$$(BENL') = -1$$

و از آنجا چهار خط

$d_3 = [BD] = [EF]$ و $d_4 = [CE] = [NF]$ و $k = [L'F]$ و $g'' =$

یکدسته همساز پدیدمی‌آورند وداریم

$$(d_3 d_4 k g'') = -1$$

چهار خط این دسته همساز را g_3 درنقطه های

$$D = [d_2, d_3] = [d_3, g_3]$$

$$C = [d_1, d_4] = [d_4, g_3]$$

$$N = [g_2, g_3] = [k, g_3]$$
$$L'' = [g'', g_3]$$

می‌برد و خواهیم داشت

$$(DCNL'') = -1$$

از اینرو چهار خط

$$d_2 = [AE] = [DA]$$
$$d_1 = [AB] = [CA]$$
$$g = [NA]$$
$$g''' = [L''A]$$

نیز یك دسته‌همساز پدیدخواهندآورد پس می توانیم بنویسیم

$$(d_2 d_1 g g''') = -1$$

یا $$(d_1 d_2 g g''') = -1 \quad (2)$$

از روی بستگی های (۱) و (۲) روشن می‌شود که g''' روی g' جا دارد و g'' نیز که بر سه نقطهٔ :

$$L' = [g, g_2] \text{ و } F = [d_3, d_4] \text{ و } L'' = [g''', g_3]$$

می‌گذرد ناگزیر روی g' جاخواهد داشت پس داریم :

$$g' = [AF] = g_1$$

یا بگفته دیگر g' همان g است و بجای بستگی (۱) می‌توان نوشت :

$$(d_1 d_2 g g_1) = -1$$

۴۰۸ - ورزش ۱ـ سه نقطه A و B و C روی $(\overrightarrow{u})$ داده‌شده می‌خواهیم نقطهٔ D را چنان پیدا کنیم که داشته باشیم .

$$(ABCD) = -1$$

۲ ــ سه خط همرس d_1 و d_2 و d_3 داده شده می‌خواهیم خط d_4 راچنان بدست آوریم که داشته باشیم .

$$(d_1 d_2 d_3 d_4) = -1$$

۴۰۹ - ورزش ۱ ــ اگر روی خط راست d نقطه های A و B و C چنان داده شده باشند که نسبت دوریهای C به A و به B برابر با k باشد نقطه‌ای دیگر مانند D بدست آورید که روی d جاداشته و نسبت دوریهای آن به A و B نیز برابر با k باشد .

استوار کنید دائره بمیان بر CD جای هندسی نقطه هائی است که نسبت دوری های هر کدام از آنها به A و به B برابر با k است .

۴۱۰ - مسئله ــ روی $(\overrightarrow{u})$ چهار نقطه A و B و C و D یك بخش همساز پدیدمی آورند . بدانسانکه $(ABCD) = -1$ می‌خواهیم اگر O نقطه خاستگاه $(\overrightarrow{u})$ باشد و داشته باشیم .

$$\overline{OA} = a \text{ و } \overline{OB} = b \text{ و } \overline{OC} = c \text{ و } \overline{OD} = d$$

بستگی میان a و b و c و d را بدست آوریم .

O $\overrightarrow{u}$ A C B D

پ ۳۲۸

گشایش - چون داریم $-1 = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = (ABCD)$

و از روی قضیه شال هم میتوان نوشت :

$$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=c-a$$
$$\overline{AD}=\overline{OD}-\overline{OA}=d-a$$
$$\overline{BC}=\overline{OC}-\overline{OB}=c-b$$
$$\overline{BD}=\overline{OD}-\overline{OB}=d-b$$

پس خواهیم داشت :

$$(1)\quad \boxed{\frac{c-a}{d-a}:\frac{c-b}{d-b}=-1}$$

و این همان بستگی است که می خواستیم و آنرا می‌توانیم بچند گونه بنویسیم :

۱ ـ از بستگی بالا برمی‌آید

$$(c-a)(d-b)+(d-a)(c-b)=0$$

و یا :

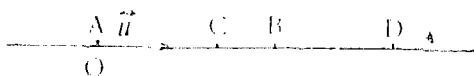
$$2ab+2cd-ac-ad-bc-bd=0$$

و از آنجا

$$(2)\quad \boxed{2(ab+cd)-(a+b)(c+d)=0}$$

۲ ـ اگر خاستگاه O را روی A بگیریم خواهیم داشت :

$$a=0 \text{ و } \overline{AB}=b \text{ و } \overline{AC}=c \text{ و } \overline{AD}=d$$

A B C B D
O

پ ۳۲۹

پس بستگی (۲) را میتوان چنین نوشت :

$$2 \quad cd = bc + bd$$

و از آنجا

$$(3) \quad \boxed{\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}$$

و یا

$$(4) \quad \boxed{\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}}$$

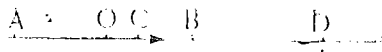
۳ـ اگر خاستگاه را میانگاه AB بگیریم خواهیم داشت. $\overline{OA} = -\overline{OB}$ و یا $a = -b$ پس بستگی (۲) را می‌توان چنین نوشت.

$$(5) \quad \boxed{a^2 = cd}$$

و یا

$$(6) \quad \boxed{\overline{OA}^2 = \overline{OC} \times \overline{OD}}$$

A O C B D

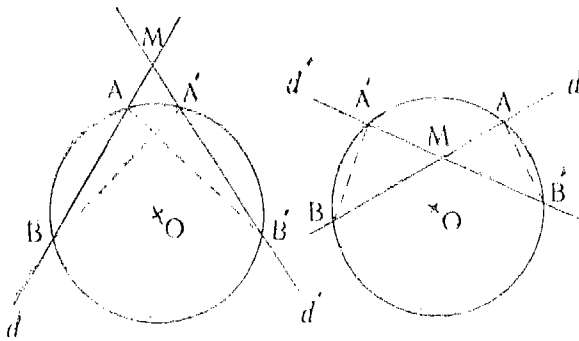
پ ۳۳۰

بخش سوم

خط های برنده

و خط های مماس بردایره

۴۱۱ - قضیه - اگر A و B نقطه‌های برخورد خط راست d و A' و B' نقطه های برخورد خط راست d' با دائره (O) بوده و دو خط d و d' در نقطهٔ M بهم برخورده باشند همواره خواهیم داشت :

$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

برهان - می توانیم نقطهٔ A' را به B و نقطهٔ B' را به A به

پ ۳۳۱

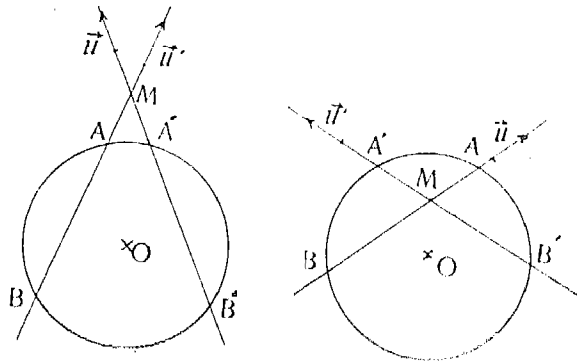
پیوندیم تا دوسه بر MA'B و MB'A پدیدآیند دراین دوسه بر داریم

$$\hat{A} = \hat{A'} \text{ و } \hat{B} = \hat{B'}$$ (فرع ۱۵۹)

پس این دو سه بر همانندانند (قضیه ۲۵۲) و از آنجا خواهیم داشت (پ۳۳۱)

$$\frac{MA}{MA'}=\frac{MB'}{MB}$$

و یا $MA \times MB = MA' \times MB'$

۴۱۳ - فرع - اگر A و B نقطه های برخورد $(\overrightarrow{u})$ و A' و B' نقطه های برخورد $(\overrightarrow{u'})$ با دائره بوده و $(\overrightarrow{u})$ و $(\overrightarrow{u'})$ در نقطهٔ

پ ۳۳۲

M بهم برخورده باشند همواره داریم:

$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

برهان - از روی قضیه بالا داریم:

$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

یا نقطه M در بیرون دائره است پس نقطه M بیرون پاره خط AB و همچنین بیرون پاره خط A'B' است (نقطه های درون این پاره خطها نقطه‌های درونی دائره هستند).

از آنجا خواهیم داشت .

$$(MA') = (MB') \quad \text{و} \quad (MA) = (MB)$$

و برابری

$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

را می‌توان چنین نوشت

$$\overline{MA} \times \overline{MB} = MA' \times MB'$$

یانقطهٔ M درون دائره جادارد پس نقطهٔ M روی پاره خط AB و هم روی پاره خط A'B' است و از آنجا

$$(MA) = -(MB)$$

و

$$(MA') = -(MB')$$

پس برابری

$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

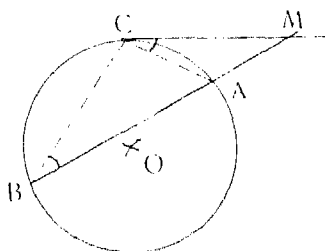
را باز می‌توان چنین نوشت

$$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MA'} \times \overline{MB'}$$

۴۱۳ – قضیه ـ اگر خط راست d در نقطه های A و B بدائره (O) بربخورد وخط راست d' در نقطه C بدائره (O) مماس بوده و M نقطه برخورد d و d' باشد داریم

$$\overline{MC}^2 = \overline{MA} \times \overline{MB}$$

برهان ـ روشن است که نقطه M همواره در بیرون دائره (O) جا دارد (قضیه ۲/۱۴۴) نقطه C را بدو نقطه A و F می پیوندیم در

دو سه بر MAC و MBC گوشه $\hat{M}$ یکی بوده و داریم $\hat{B} = \hat{C}$
(قضیه ۱٦۰)

پ ۲۳۳

پس این دوسه بر همانندانند (قضیه۲٥۲) از آنجا خواهیم داشت

$$\frac{MA}{MC}=\frac{MC}{MB}$$

ویا

$$MC^2=MA\times MB$$

٤١٤ ـ فرع ـ اگر $(\overrightarrow{u})$ درنقطه های A و B بدائره (O) بر بخورد و $(\overrightarrow{u'})$ درنقطه C بدائره (O) مماس بوده و M نقطه برخورد $(\overrightarrow{u})$ و $(\overrightarrow{u'})$ باشد داریم

$$\overline{MC}^2=\overline{MA}\times\overline{MB}$$

برهان ـ از روی قضیه بالا داریم

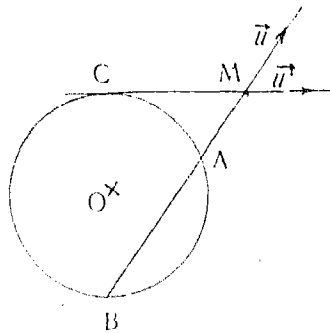
$$MC^2=MA\times MB$$

و چون نقطه M بیرونی است پس

$$(MA)=(MB)$$

و از آنجا خواهیم داشت

$$\overline{MC}^2 = \overline{MA} \times \overline{MB} \quad (پ۳۳٤)$$

پ ۳۳٤

٤١٥ - قضیه وارون (٤١٢) - اگر A و B دو نقطه از $(\overrightarrow{u})$ و A' و B' دو نقطه از $(\overrightarrow{u'})$ بوده و M نقطه بر خورد این دو آسه باشد و داشته باشیم

$$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MA'} \times \overline{MB'}$$

چهار نقطهٔ A و B و A' و B' روی یك دائره جادارند.

برهان - یا داریم

$$(MA) = (MB)$$

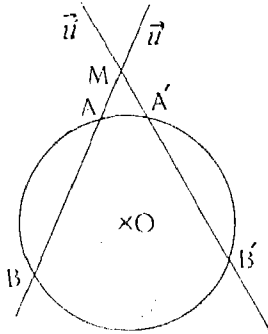
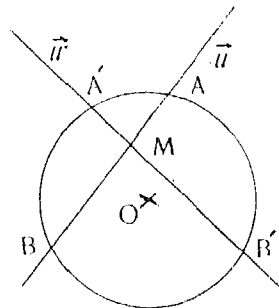
پس از برابری داده شده بر می‌آید

$$(MA') = (MB') \quad (پ۳۳٥)$$

یا داریم

$$(MA) = -(MB)$$

پس از همان برابری بر می‌آید

$$(\overline{MA'}) = -(\overline{MB'}) \qquad (\text{پ ۳۳۶})$$

پ ۳۳۵ پ ۳۳۶

بر سه نقطه A و 'A و 'B یك دائره می‌گذرانیم این دائره نمی‌تواند در نقطه A به $(\overrightarrow{u})$ مماس باشد زیرا اگر چنین باشد از روی (فرع ٤١٤) خواهیم داشت:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MA'} \times \overline{MB'}$$

و چون

$$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MA'} \times \overline{MB'}$$

از اینرو

$$\overline{MA} = \overline{MB}$$

و این نشدنی است چون A روی B جا ندارد پس دائره‌ای که بر A و 'A و 'B می‌گذرد دریك نقطه مانند B_1 به $(\overrightarrow{u})$ بر می‌خورد و از روی (فرع ٤١٢) خواهیم داشت:

$$\overline{MA} \times \overline{MB_1} = \overline{MA'} \times \overline{MB'}$$

و چون داشتیم

$$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MA'} \times \overline{MB'}$$

از اینرو

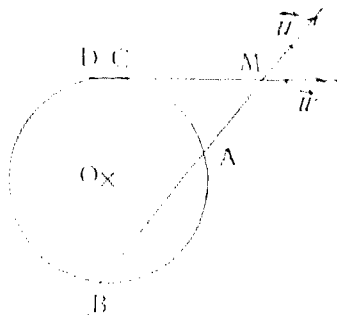
$$\overline{MB_1} = \overline{MB}$$

و از آنجا نقطه B روی نقطه B_1 جا خواهد داشت و چهار نقطه A و B و A' و B' روی یك دائره جادارند.

۴۱۶ – قضیه وارون (٤١٤) ـ اگر A و B در نقطه از $(\overrightarrow{u})$ و C نقطه‌ای از $(\overrightarrow{u'})$ بوده و داشته باشیم

$$\overline{MC}^2 = \overline{MA} \times \overline{MB}$$

دائره‌ای که به سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد به $(\overrightarrow{u'})$ در نقطهٔ C مماس است.

برهان ـ اگر دائره ای که بر A و B و C می‌گذرد به $(\overrightarrow{u'})$

ب ۳۳۷

در نقطه دیگری مانند D بر بخورد از روی (فرع ٤١٢) خواهیم داشت:

$$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MD}$$

و چون داریم:

$$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC}^{2}$$

پس

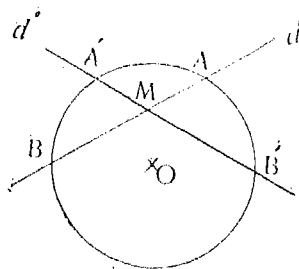
$$\overline{MC} = \overline{MD} \qquad (\text{پ}۳۳۷)$$

ازاینجا چنین برمی آید که نقطهٔ D نیز روی نقطهٔ C جادارد (پ۳۳٦) یابگفته دیگر ($\overrightarrow{u}$) درنقطه C بر دائره مماس است.

۴۱۷ - مسئله - اندازه درازای سه پاره‌خط p و q و r میباشند می‌خواهیم پاره‌خط‌دیگری پیدا کنیم که اندازهٔ درازای آن x بوده و داشته باشیم.

$$\frac{p}{r} = \frac{x}{q}$$

گشایش - روی خط راست d نقطه های M و A و B را چنان می گزینیم که:

$$(BM) = (MA) \text{ و } MB = q \text{ و } MA = p$$

پ ۳۳۸

و روی خط راست دلخواه d' که از M می گذرد نقطهٔ A' را

را بدانسان می‌گزینیم که داشته باشیم $MA' = r$ بر سه نقطه A و B و A' دائره ای می‌گذرانیم این دائره به d' در نقطهٔ دیگری مانند B' برمی خورد زیرا M نقطه درونی دائره می باشد و از روی (قضیه ۴۱۱) داریم :

$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

یا

$$p \times q = r \times MB'$$

یا

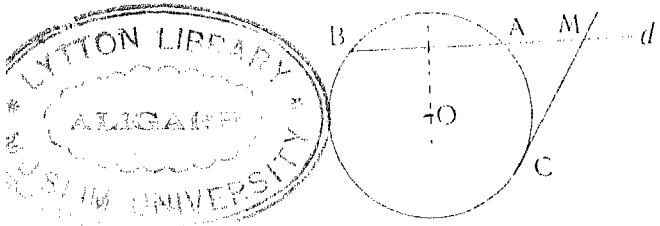
$$\frac{p}{r} = \frac{MB'}{q}$$

پس MB' همان پاره خط x است که می‌خواستیم (پ ۳۳۸).

۴۱۸ - مسئله - اگر a و b اندازه‌های درازاهای پهلوهای یك راست گوشه باشند می‌خواهیم اندازه درازای پهلوی خشتی (مربع) را بدست آوریم که هم ارز این راست گوشه باشد.

گشایش - روی خط راست d سه نقطهٔ M و A و B را بدانسان می گزینیم که $MA = a$ و $MB = b$ و $(MA) = (MB)$ باشد بر دو نقطهٔ A و B دائره دلخواهی می‌گذرانیم چون نقطهٔ M بیرون دائره است پس می توان از این نقطه خطی کشید که با دائره در یك نقطه مانند C مماس شود (مسئله ۱۹۶) از اینرو خواهیم داشت :

$$MC^2 = MA \times MB$$

پس MC همان اندازه درازای پهلوی خشتی هم ارز با راست گوشه است (پ۳۳۹)

پ ۳۳۹

۴۱۹ - مسئله - همچندی $x^۲+px+q=۰$ داده‌شده‌ی خواهیم دو پاره آسه چنان پیدا کنیم که اندازه های جبری آنها ریشه های این همچندی باشد.

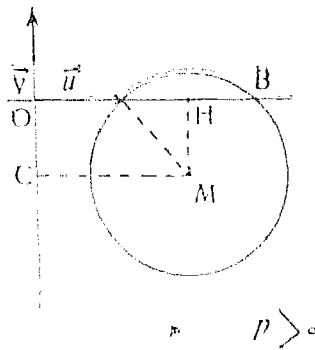
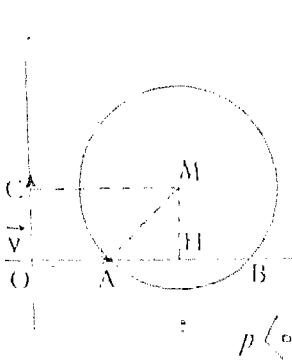
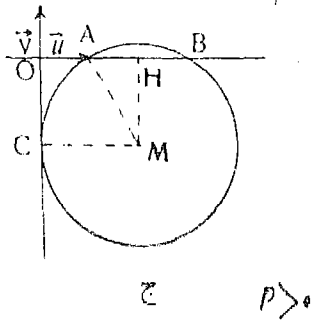
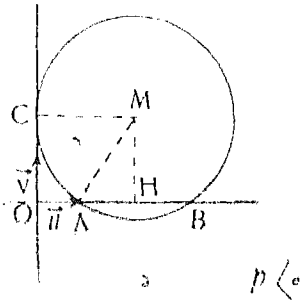
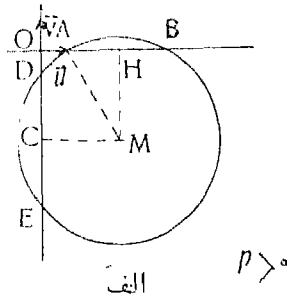
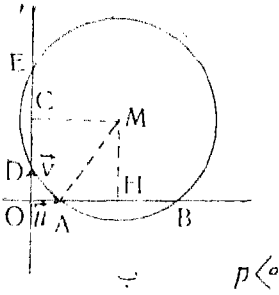
گشایش - اگر $(\overrightarrow{u})$ و $(\overrightarrow{v})$ دو آسه ستونی برهم بوده ودارای یك خاستگاه O باشند در روی $(\overrightarrow{u})$ دو نقطه A و B را چنان می گزینیم که داشته باشیم

$$\overline{OB}=q \quad و \quad \overline{OA}=۱$$

و در روی $(\overrightarrow{v})$ نقطه C را چنان می گزینیم که داشته باشیم $OC=-\frac{p}{۲}$ از نقطه C خطی ستونی بر $(\overrightarrow{v})$ وازمیان گاه AB خطی ستونی بر $(\overrightarrow{u})$ می کشیم این دو خط بهم در نقطه‌ای مانند M بر می‌خورند بمرکز M و پرتو MA=MB دائره‌ای می کشیم.

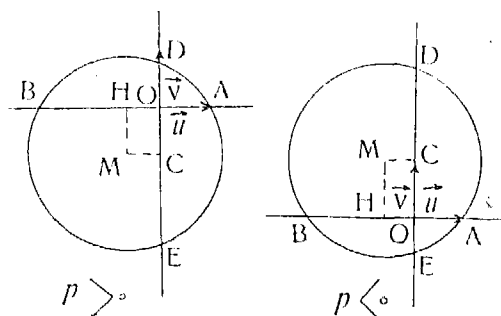
۱ ـ دائره (M) به $(\overrightarrow{u})$ در دو نقطهٔ D و E بر می‌خورد

پ ۳٤۰

(پ ۳٤۰ / الف و ب و پ ۳٤۱)

از روی (فرع ۴۱۲) خواهیم داشت .

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OD} \times \overline{OE}$$

و یا

$$\overline{OD} \times \overline{OE} = q$$

پ ۳۴۱

ولی نقطهٔ C میان گاه‌زه DE است پس داریم $\overline{CD} + \overline{CE} = ۰$ و از روی قضیه شال می‌توانیم بنویسیم :

$$\overline{OE} = \overline{OC} + \overline{CE}$$

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD}$$

و از آنجا

$$\overline{OE} + \overline{OD} = ۲\,\overline{OC}$$

و یا

$$\overline{OD} + \overline{OE} = -p$$

پس $\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{OE}$ پاره آسه‌هائی هستند که اندازه جبری آنها

$\overline{OD}$ و $\overline{OE}$ همان ریشه های همچندی $x^2+px+q=0$ میباشند .

۲ ـ دائره (M) بر $(\overrightarrow{\nu})$ مماس می باشد (پ۳۴۰/ج و د) از روی (قضیه ۱۴۴) چنین بر می آید که نقطه تماس همان نقطه C می باشد پس خواهیم داشت :

$$\overline{OC}^2=\overline{OA}\times\overline{OB} \qquad \text{(فرع ۴۱۴)}$$

و یا

$$\overline{OC}^2=q$$

و چون

$$OC=-\frac{p}{2}$$

پس داریم

$$\overline{OC}+\overline{OC}=-p$$

و

$$\overline{OC}\times\overline{OC}=q$$

یا بگفته دیگر دو پاره آسه‌ای که می‌خواهیم باهم برابر بوده و برابر با $\overrightarrow{OC}$ که دارای اندازه جبری $\overline{OC}$ است می‌باشند .

۲ ـ دائره (M) به $(\overrightarrow{\nu})$ بر نمی‌خورد (پ ۳۴۰/ه/و) در اینجا همچندی داده شده دارای ریشه نبوده و مسئله دارای پاسخ نیست . زیرا اگر همچندی داده شده دارای دو ریشه x' و x'' باشد می‌دانیم که همواره مجموع دو ریشه آن برابر $-p$ و حاصلضرب آنها برابر با q است پس اگر نقطه های A و B را روی $(\overrightarrow{u})$ و نقطه های D و E

را روی $(\overrightarrow{v})$ چنان بگزینیم که داشته باشیم.

$$OE = x' \text{ و } OD = x'' \text{ و } \overline{OB} = q \text{ و } \overline{OA} = ۱$$

چون داریم

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OD} \times \overline{OE}$$

پس (ازروی قضیه۴۱۵) چهارنقطهٔ A وB وC وD همواره روی یك دائره جا دارند و مرکز این دائرهٔ نقطهٔ بر خورد دو عمودی است که برمیان گاه های AB و DE فرود آمده باشند.

اگر C میان گاه DE باشد روشن است که داریم

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OD} + \overline{OE}}{۲} = \frac{x' + x''}{۲}$$

و یا

$$\overline{OC} = -\frac{p}{۲}$$

پس دائره‌ای که به A و B و D و E می‌گذرد همان دائره (M) است واین نشدنی است زیرا پذیرفته ایم که دائره (M) به $(\overrightarrow{u})$ در هیچ نقطه‌ای بر نمی‌خورد.

بررسی - برای آنکه دائره (M) به $(\overrightarrow{v})$ بر بخورد یا باآن مماس باشد (پ۳۴۰/الف وب وج ود/پ ۳۴۱) بایدداشته باشیم

$$MA \geqq MC \qquad \text{(قضیه۱۴۳)}$$

یا

$$MA^۲ \geqq MC^۲$$

ولی اگر H پای خط ستونی باشد کـه از M بر $(\overrightarrow{u})$ فرود آمده (میان گاه AB) درسه بر راست گوشه MHA داریم .

$$MA^{2} = AH^{2} + MH^{2}$$

و می دانیم که

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

و از روی قضیه شال نیز .

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

پس

$$\overline{AH} = \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{2} = \frac{q - 1}{2}$$

و چون

$$\overline{HM} = \overline{OC} = -\frac{p}{2}$$

از اینرو

$$HA^{2} = \left(\frac{q - 1}{2}\right)^{2} + \left(-\frac{p}{2}\right)^{2}$$

و از سوی دیگر

$$\overline{CM} = \overline{OH}$$

و از روی قضیه شال

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH}$$

پس

$$CM = ۱ + \frac{q-۱}{۲} = \frac{۱+q}{۲}$$

و

$$\overline{MC}^{۲} = \overline{CM}^{۲} = \left(\frac{۱+q}{۲}\right)^{۲}$$

از آنجا نا برابری

$$MA^{۲} \geqq MC^{۲}$$

را می‌توان چنین نوشت

$$\left(\frac{q-۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{p}{۲}\right)^{۲} \geqq \left(\frac{q+۱}{۲}\right)^{۲}$$

یا

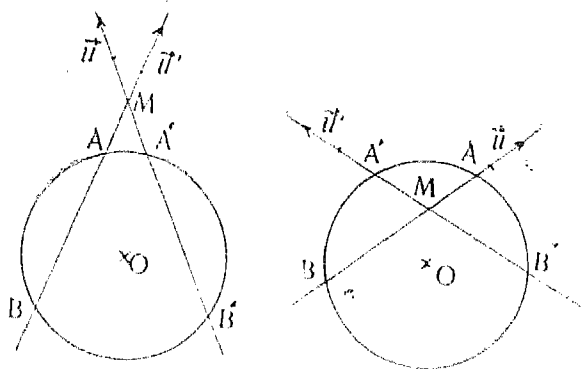
$$\boxed{p^{۲} - ۴q \geqslant ۰}$$

روشن است که اگر داشته باشیم $q < ۰$ نا برابری بالا همواره درست بوده و مسئله دارای دو پاسخ است (پ۳۴۱)

بخش چهارم

توان نقطه نسبت بدائره

۴۳۰ - تعریف - اگر از نقطه M آسه دلخواهی مانند $(\overrightarrow{u})$ بگذرانیم که به دائره در دو نقطه A و B بر بخورد از روی (فرع ۴۱۲) میدانیم که $\overline{MA} \times \overline{MB}$ بستگی به $(\overrightarrow{u})$ ندارد و این عدد جبری را توان نقطهٔ M نسبت بدایره گویند و آنرا به p مینمایند و مینویسند.

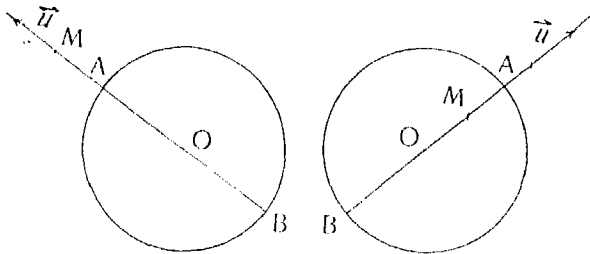
$$p = \overline{MA} \times \overline{MB}$$

پ ۳۴۲

روشن است که اگر $p>0$ نقطه M بیرون دایرهٔ (O) و اگر $p<0$ نقطهٔ M درون دایره (O) و اگر $p=0$ نقطه روی این دائره جا دارد.

٤٢١ - قضیه - اگر d دوری نقطه M ازمرکز O یك‌دائره و r پرتو این‌دائره و p توان نقطه M نسبت‌بدائره باشد همواره داریم

$$p = d^{2} - r^{2}$$

برهان - اگرمیان بری از دائره (O) راکه از M می گذرد

پ ٣٤٣

بکشیم و A و B دوسراین میان‌بر باشند وروی این میان‌بر برداریکه ای گزیده باشیم داریم :

$$p = \overline{MA} \times \overline{MB}$$

ولی از روی قضیه شال

$$\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA}$$

و

$$\overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB}$$

و نیز

$$\overline{OA} + \overline{OB} = 0$$

پس

$$\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MO}^{2} - \overline{OA}^{2}$$

و از آنجا خواهیم داشت .

$$p = d^2 - r^2$$

۴۲۲ – ورزش ۱ – اگر M نقطه بیرونی یك دائره باشد و از این نقطه مماسی باین دائره بکشیم و C نقطه تماس باشد استوار کنید .

$$p = MC^2$$

۲ – اگر M نقطه درونی دائره (O) باشد و آنرا بمرکز این دائره به پیوندیم و از M عمودی بر MO فرود آوریم تا بدائره در نقطهٔ C بر بخورد استوار کنید .

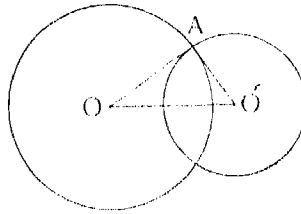
$$p = -MC^2$$

۴۲۳ - تعریف – اگر دو دائره (O) و (O') بیکدیگر بر بخورند و در یك نقطه برخورد دومماس بر آنها برهم ستونی باشند دو دائره را راست گذر گویند .

۴۲۴ – قضیه – برای آنکه دودائره (O, R) و (O', R') راست گذر باشند بایسته و بسنده است که توان O نسبت به (O',R') برابر با R^2 باشد .

برهان۱– اگر دودائره (O, R) و (O', R') راست گذرو A یکی از نقطه های برخورد آنها باشد (پ۳٤٤) OA ستونی بر O'A می شود زیرا این دو شعاع ستونی‌اند بر مماسهائی براین دو دائره در نقطه A که آنها نیز برهم ستونی گرفته شده‌اند (قضیه ۱۱۰) پس O'A

و OA همان مماسهای بردائره های (O',R') و (O,R) در نقطهٔ A می باشند (قضیه ۲/۱۴۳) و از روی (قضیه۴۲۱) توان نقطه O نسبت به

پ۳۴۴

دائره (O',R') برابر با $OO'^2 - R'^2$ میباشد و چون سه بر $OO'A$ راست گوشه است پس

$$OO'^2 - O'A^2 = OA^2 = R^2$$

۲ ـ اگر توان O مرکز دائره (O,R) نسبت بدائره (O',R') برابر با R^2 باشد از روی (قضیه ۴۲۱) داریم.

$$R^2 = OO'^2 - R'^2$$

و یا

$$R^2 + R'^2 = OO'^2$$

پس

$$(R+R')^2 > OO'^2$$

و

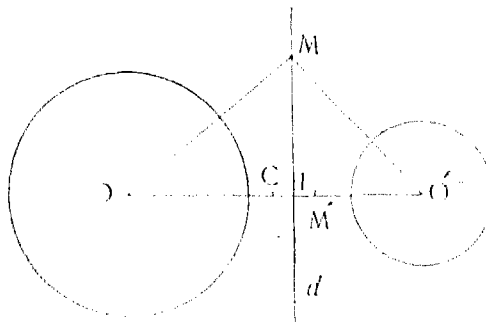
$$(R-R')^2 < OO'^2$$

و از آنجا

$$R - R' < OO' < R + R'$$

و دو دائره (O) و (O') ناچار در دو نقطه بهم بر می‌خورند (۱۷۴) چنانچه A یکی از این دو نقطه باشد داریم $OA = R$ و $O'A = R'$ پس بستگی $R^2 = OO'^2 - R'^2$ چنین نوشته میشود $OA^2 = OO'^2 - O'A^2$ و این برابری نشان می‌دهد که سه‌بر $OO'A$ راست گوشه است و از آنجا چنین برمیآید که مماسهای بر دو دائره در A برهم عمود اند و یا بگفته دیگر این دودائره راست گذراند.

۴۳۵ – قضیه – جای هندسی نقطه‌هائی که توان‌های هر یك از آنها نسبت بدو دائره باهم برابراند خط راستی است ستونی بر خطی که از مرکزهای دودائره می گذرد.

برهان ۱ – اگر دو دائره (O,R) و (O',R') را داشته باشیم روی پاره خط OO' تنها یك نقطه مانند I میتوان چنان یافت که

پ ۳۴۵

توانهای آن نسبت به این دو دایره با هم برابر باشند زیرا برای چنین نقطه باید داشته باشیم

$$IO^2 - R^2 = IO'^2 - R'^2$$

و یا

$$IO^2 - IO'^2 = R^2 - R'^2$$

و از آنجا

$$(IO + IO)\,(IO - IO') = R^2 - R'^2$$

و یا

$$OO'(IO - IO') = R^2 - R'^2$$

این بستگی نشان می‌دهد که اگر $R > R'$ باشد خواهیم داشت

$$IO > IO'$$

یا بگفته دیگر نقطه I از مرکز دائره بزرگتر دور تر است تا از مرکز دائره کوچکتر پس اگر C میان گاه پاره خط OO' باشد می توان چنین نوشت :

$$IO = CO + IC$$

و

$$IO' = CO' - IC$$

و از آنجا

$$IO - IO' = 2\,IC$$

پس

$$IC = \frac{R^2 - R'^2}{2OO'}$$

یابگفته دیگر نقطه I که میخواستیم از میان گاه OO' بدوری

$\frac{R^2 - R'^2}{2OO'}$ بوده و روی پاره خط CO' جادارد .

۲ ـ خط d که از نقطهٔ I بر OO' ستونی میشود جای هندسی نقطه های است که توان های هریك از آنها نسبت بدو دائر (O,R) و (O',R') باهم برابر اند .

زیرا اگر M نقطه‌ای از خط d باشد داریم

$$MO^2 = MI^2 + IO^2$$

و

$$MO'^2 = MI^2 + IO'^2$$

پس

$$MO^2 - MO'^2 = IO^2 - IO'^2$$

و چون داشتیم

$$IO^2 - IO'^2 = R^2 - R'^2$$

پس

$$MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$$

ویا

$$\boxed{MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2}$$

یابگفته دیگر توان نقطهٔ M نسبت بدائره (O,R) برابر باتوان نقطه M نسبت بدائره (O',R') است .

۳ ـ اگر M نقطه‌ای باشد بدانسان که توان آن نسبت بدائره (O,R) برابر باتوان آن نسبت بدائره (O',R') باشد خواهیم داشت

$$MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$$

یا

$$MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$$

و چون داشتیم

$$IO^2 - IO'^2 = R^2 - R'^2$$

پس

$$MO^2 - IO^2 = MO'^2 - IO'^2$$

اگر M' تصویر M روی OO' باشد از روی (قضیه ۲۲۴) در سه برهای MIO و MIO' داریم

$$MO^2 = IO^2 + MI^2 + 2IO \times IM'$$

و

$$MO'^2 = IO'^2 + MI^2 + 2IO \times IM'$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$(MO^2 - IO^2) - (MO'^2 - IO'^2) = \pm 4IO \times IM' = 0$$

و چون $IO \neq 0$ پس $IM' = 0$ ازاینرو M' روی I می‌باشد یا بگفته دیگر M روی خط d جادارد .

۴۳۶ – تعریف – جای هندسی نقطه‌هائی را که توان های هر یك از آنها نسبت بدو دایره بایکدیگر برابر باشند **آسه بنیادی** (محور اصلی) دودایره گویند .

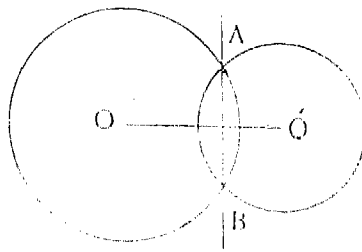
۴۳۷ – فرع – آسه بنیادی دو دائره .

۱ ـ اگر بهم‌در دونقطه برخورده باشند خطی است که براین دونقطه می گذرد .

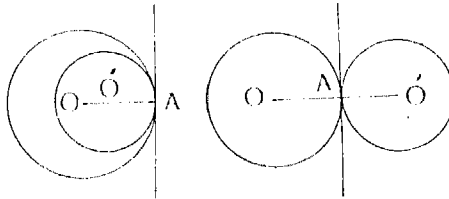
۲ ـ اگر بر یکدیگر مماس‌باشند خطی‌است که در نقطه‌تماس بر هر دودایره مماس شود .

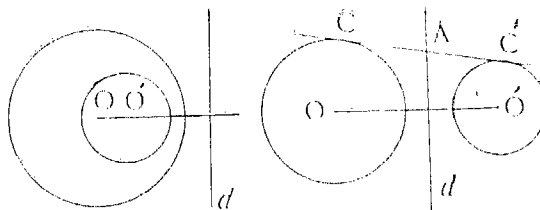
۳ ـ اگر به یکدیگر در هیچ نقطه برنخورند (بیرونی یا درونی باشند) خطی است که به هیچ یك از دو دایره بر نمی‌خورد

برهان ۱ ـ اگر A و B دونقطه برخورد دودایره (O) و(O') باشند توان این دونقطه نسبت بهر یك از دو دایره برابر با صفراست

پ ۳٤٦

پس دونقطه A و B روی آسه‌بنیادی این دودایره‌جادارند و یابگفته دیگر آسه بنیادی خط راستی است که از A و B می گذرد (پ۳٤٦)

۲ ـ اگر دو دایره O و O' در نقطهٔ A به یکدیگر مماس باشند می دانیم نقطهٔ A روی خط OO' جادارد وچون این نقطه نسبت‌به دو دایره دارای توانی برابر باصفر است پس‌روی‌آسه بنیادی این دو دایره‌می‌باشد ازسوی دیگر آسه بنیادی خط ستونی است که‌از نقطهٔ

A بر OO' کشیده شود پس از روی (قضیه۱۴۳) مماس بر دو دائره در نقطهٔ A همان آسه بنیادی خواهد بود (پ ۳۴۷)

پ ۳۴۷

۳ـ اگر دودائره O و O' درهیچ نقطه‌ای بهم برنخورند آسه بنیادی نمیتواند بهیچ یك از آنها در نقطه ای بر بخورد زیرا اگر M نقطه برخورد یکی از آنها باآسه بنیادی باشد چون توان این نقطه نسبت بهر دو برابر با صفر است دائره دیگر نیز از این نقطه خواهد گذشت (پ۳۴۸)

پ ۳۴۸

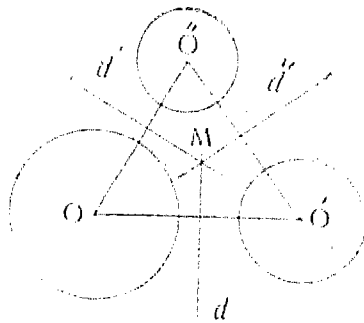
۴۳۸ – ورزش – اگر خطی بدو دائره O و O' در نقطه های C و C' مماس باشد استوار کنید آسه بنیادی از میانگاه CC' می گذرد واز آنجا برای کشیدن آسه بنیادی دو دائره بیرونی راهی بدست آورید (پ۳۴۸)

۴۲۹ ــ ورزشــ آسه بنیادی دودائره را که یکی از آنها به پرتو برابر باصفر است (نقطه) بدست آورید .

۴۳۰ ــ قضیهــ آسه‌های بنیادی سه‌دایره که دو بدو باهم گرفته شوند همرس یاهمروانند .

برهان ــ اگر سه دایره (O) و (O') و (O") داشته‌باشیم :

یا سه نقطه O و O' و O" روی یك خط راست جادارند آسه بنیادی هردودائره ازاین سه‌دائره که باهم گرفته شوند ستونی بریك خط راست بوده و بایکدیگر همرو میشوند .

یا سه نقطهٔ O و O' و O" روی یك خط راست جاندارند ــ اگر d آسه بنیادی دو دائره (O) و (O') و d' آسه بنیادی دو دائره

پ ۳۴۹

(O) و (O") باشد این دوخط چون ستونی میباشند بردوخط OO' و OO" که بهم‌برخورده‌اند پس درنقطه‌ای مانند M بهم‌برمی‌خورند این نقطه از یك سو نسبت به دائره‌های (O) و (O') و از سوی دیگر نسبت بدو دائره (O) و (O") دارای یك توان است پس نسبت بدو

دائره (O') و (O'') نیز دارای یك توان بوده و یابگفته دیگر روی آسه بنیادی این دودائره جاخواهد داشت(پ۳۴۹)

۴۳۱-تعریف ـ نقطهٔ برخورد آسه های بنیادی سه دائره را که دو بدو باهم گرفته شوند **مرکز بنیادی** این سه دائره می گویند و اگر آسه‌های بنیادی سه‌دائره که دوبدو باهم گرفته شوند همرو باشند راستای آنها را **راستای بنیادی** سه دائره گویند .

۴۳۲ ـ ورزش ـ استوار کنید اگر سه دائره دوبدو بهم مماس باشند خطهائی که در نقطه های تماس براین سه دائره مماس شوند همرس‌اند .

۴۳۳ ـ ورزش ـ از روی قضیه (۴۳۰) راهی برای کشیدن آسه‌بنیادی هر دودائره بدست آورید .

۴۳۴ ـ ورزش ـ استوار کنید اگرسه دائره دو بدو بیکدیگر برخورده باشند زه هائی که از برخورد هردوتای آنها پدید می‌آید همرس‌اند .

۴۳۵ ـ ورزش ـ استوار کنید نقطه‌هائی از آسه بنیادی دو دائره که در بیرون هردو باشند جای هندسی مرکزهای دائره‌هائی است که بر دو دائره داده شده راست گذر می‌باشد .

۴۳۶ ـ مسئله ـ یك خط راست و دونقطه دریك کنار آن داده شده‌می‌خواهیم‌براین‌دونقطه دائره‌ای بگذرانیم که براین خطراست مماس باشد .

گشایش ـ اگر a خط راست و A و B دو نقطه باشند که در یك کنار a جادارند یاخط راستی که بر A و B می گذرد با a همرو است‌پس‌مرکز دائره‌ای که‌می‌خواهیم روی‌خطی‌جادارد که‌بر میانگاه

AB گذشته و ستونی بر آن باشد اگر C نقطه برخورد این خط با d باشد چون بر سه نقطهٔ A و B و C دائره‌ای بگذرانیم این دائره در نقطهٔ

پ ۳۵۰

C بر خط d مماس خواهد شد زیرا اگر O مرکز این دائره باشد پرتو OC از دایره بر خط d ستونی بوده و از آنجا خط d بر دائره (O) مماس می‌گردد.

یا خط AB در نقطهٔ D به خط d بر می‌خورد روشن است که D در بیرون پاره خط AB جا دارد ولی توان نقطهٔ D نسبت بهر دائره مانند (O'') که بر دو نقطهٔ A و B بگذرد برابر با $DA \times DB$ خواهد بود اگر از نقطهٔ D مماسی بر دائره دلخواه (O') بکشیم و C' نقطهٔ تماس باشد خواهیم داشت.

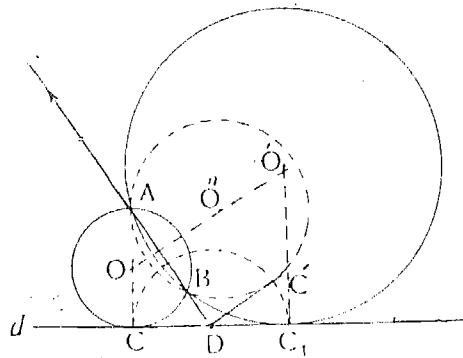
$$DC'^{۲} = DA \times DB$$

حال اگر C را روی خط d بدانسان بگزینیم که داشته باشیم $DC = DC'$ باز خواهیم داشت.

$$DC^{۲} = DA \times DB$$

و اگر بردارهای یکه‌ای روی d و AB بگزینیم داریم .

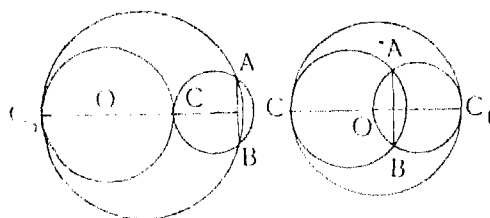
$$\overline{DC}^{2} = \overline{DA} \times \overline{DB}$$

وازاین برابری بر می‌آید که اگر بر سه نقطهٔ A و B و C دایره ای بگذرانیم این دایره بر خط d در C مماس خواهد شد (قضیه ٤١٦)

پ ۳۵۱

بررسی ـ روشن است مسئله دارای دو پاسخ (O) و (O')است زیرا می‌توان روی d دو نقطه C و C_1 را یافت بدانسانکه دوری آنها از D برابر با DC' باشد .

۴۳۷ ـ مسئله ـ یک دائره و دو نقطه درون یا بیرون آن داده شده می‌خواهیم براین دو نقطه دائره‌ای بگذرانیم که بر دائره داده‌شده مماس باشد .

گشایش ـ اگر (O) دائره داده شده و A و B دو نقطه بیرونی یادرونی این دائره باشند یاخطی که از میانگاه پاره خط AB ستونی

بر AB کشیده می شود از مرکز دائره (O) می گذرد از اینرو اگر C نقطه برخورد این خط بادایره (O) باشد دائره‌ای که به A و B و C می گذرد در نقطه C مماس بر دائره (O) خواهد بود (قضیه ۱۷۶ ـ وارون)

پ ۳۵۲

روشن‌است که دراینحال مسئله دارای دوپاسخ است زیرا خط عمود برمیانگاه AB دردونقطه C و C_1 بدائره (O) برمی‌خورد مگر آن که AB بر دائره (O) در یك نقطه مماس‌باشد دراینحال‌مسئله دارای یك پاسخ‌است زیرا نمی‌توان‌بر A و B و C که روی یك‌خط‌راست‌جا دارند دائره‌ای گذراند. (پ۳۵۲)

یا خطی که از میانگاه پاره‌خط AB ستونی بر AB کشیده‌می شود از مرکز دائره (O) نمی گذرد در اینحال اگر (O''') دائره دلخواهی باشد که بر AB گذشته وبدائره (O) در دونقطهٔ E و F بر بخوردرروشن‌است خط EF آسه بنیادی دائره‌های (O) و (O''') است (فرع ۴۲۷) ودوخط AC و EF همرو نیستند برای آنکه اگر چنین

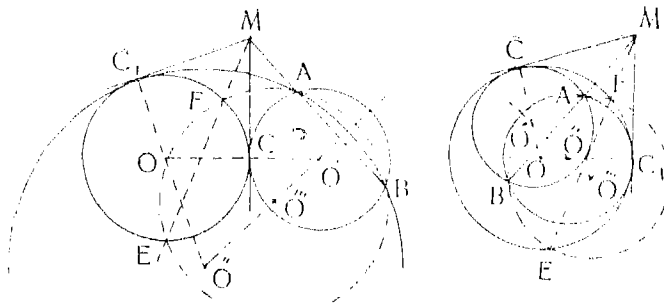
باشد خط ستونی بر AB در میانگاه نیز ستونی بر EF در میانگاه بوده و از مرکز دائره (O) خواهد گذشت و این نشدنی است.

پس دو خط AB و EF بهم در یك نقطه M بر می خورند و بآسانی میتوان دید که این نقطه همیشه بیرون دائره های (O) و (O') می باشد اگر از نقطهٔ M خطی مماس بر دائره (O) بکشیم و C نقطه تماس باشد خواهیم داشت:

$$MC^2 = ME \times MF = MA \times MB$$

از اینجا اگر بردار های یکه ای روی خط های AB و MC بگیریم خواهیم داشت.

$$\overline{MC}^2 = \overline{MA} \times \overline{MB}$$

پس از روی (قضیه ٤١٦) دایره‌ای که بر سه نقطه A و B و C

ب ۳۵۳

می گذرد بر خط MC و از آنجا بر دائره (O) در نقطه C مماس خواهد بود (فرع ١٧٦/ب)

بررسی - نقطهٔ M بستگی ببرگزیدن دائره ('''O) ندارد زیرا نقطهٔ M مرکز بنیادی دائره های (O)و ('''O) وهر دائره دلخواه دیگری که بر AB می گذرد میباشد.

و از نقطهٔ M می‌توان دو مماس بر دائره (O) کشید از آنجادو نقطهٔ تماس C و C_1 بدست می آید و مسئله دارای دو پاسخ ('O) و (''O) خواهد بود مگر آنکه خط AB بر دائره (O) مماس باشد در اینحال مسئله تنهادارای یك پاسخ استزیرا یکی از نقطه های‌تماس C و C_1 روی خط AB جادارد و بر A و B واین نقطه تماس نمی‌توان یك دائره گذراند.

بخش پنجم

چند برهای منتظم

۴۳۸ - یادآوری - اگر بتوانیم دریك دائره (O,R) یك n بر منتظم محاط کنیم میتوانیم :

۱ - بر همین دائره یك n برمنتظمی محیط کنیم زیرا بسنده است که در تارکهای n برمنتظم محاطی مماسهائی بردائره بکشیم تا n برمنتظم محیطی که میخواهیم بدست آید (قضیه ۱۷۰)

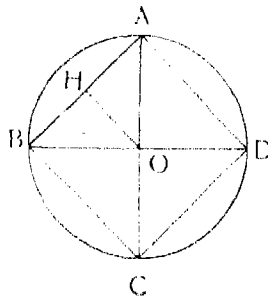
۲ - درهمین دائره می‌توانیم چند برمنتظمی محاط کنیم که شماره پهلوهای آن برابر با $2n$ باشد زیرا بسنده‌است که‌میان گاه‌های کمانهای رو بروی پهلوهای n بر منتظم محاطی را پیدا کنیم تا از تارکهای n برمنتظم محاطی واین‌میان گاه‌ها تارکهای چندبرمنتظم محاطی که می‌خواهیم بدست آید (قضیه ۱۷۰)

۴۳۹ - دریك دائره :

۱ - اندازه درازای پهلوی یك n برمنتظم محاطی را با C_n و اندازهٔ پرتو دائره محاطی همین چندبر را به a_n نمایش میدهیم.

۲ - اندازه درازای پهلوی یك n بر منتظم محیطی را به C'_n نمایش می‌دهیم.

٤٤٠ – مسئله – می خواهیم در دائره (O,R) خشتی محاط کرده واندازه درازای پهلوی این خشتی وپرتو دائره محاط درآن را بدست آوریم .

پ ۳٥٤

گشایش – در دائره (O,R) دو میان بر ستونی بریکدیگر را می کشیم اگر A و C دوسریك میان‌بر و B و D دوسر میان‌بر دیگر باشند خواهیم داشت ،

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DA}$$

پس از روی (قضیه ۱۷۰) پیکر ABCD چهار بر منتظم محاط در دائره (O,R) بوده یابگفته دیگر خشتی است .

چون در سه‌بر OAB داریم :

$$AB^{۲} = OA^{۲} + OB^{۲} = ۲R^{۲}$$

ازآنجا خواهیم داشت :

$$\boxed{C_{٤} = AB = R\sqrt{۲}}$$

و اگر H پای خط ستونی باشد که از O بر AB فرود آمده داریم :

$$a_{٤} = OH = \frac{AB}{٢} = \frac{R\sqrt{٢}}{٢}$$

۴۴۱ الف - مسئله – می‌خواهیم در دائره (O,R) شش‌بر منتظمی محاط کرده و اندازه درازای پهلوی آن و پرتو دائره محاط در آن را بدست آوریم .

گشایش – اگر پیرامون دائره (O,R) را به شش پاره برابر یکدیگر بخش کرده باشیم و A و B و C و D و E و F نقطه های بخش باشند سه‌بر OAB متساوی الاضلاع است زیرا از روی (قضیه ۱۵۸) داریم .

$$\widehat{OAB} = \frac{\widehat{DOB}}{٢} = \widehat{BOA}$$

و

$$\widehat{OBA} = \frac{\widehat{EOA}}{٢} = \widehat{BOA}$$

پس :

$$\widehat{AOB} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$$

از آنجا خواهیم داشت .

$$C_{٦} = AB = R$$

اگر H پای خط ستونی باشد که از O بر AB فرود آمده در

سه بر راست گوشه OHA داریم :

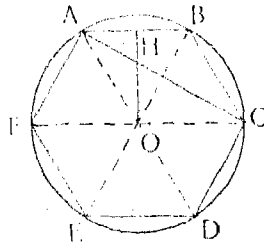
پ ٣٥٥

$$OH^{٢} = OA^{٢} - AH^{٢}$$

ویا

$$OH^{٢} = R^{٢} - \frac{R^{٢}}{٤} = \frac{٣R^{٢}}{٤}$$

پس

$$a_{٦} = OH = \frac{R\sqrt{٣}}{٢}$$

۴۴۱ ب-مسئله - می خواهیم در دائره (O,R) سه‌بر منتظمی محاط کرده و اندازه درازای پهلوی آن و پرتو دائره محاط درآنرا بدست آوریم.

گشایش - اگر پیرامون دائره (O,R) را به شش پاره برابر یکدیگر بخش کرده (پ٣٥٥) و نقطه‌های بخش را یك درمیان بهم به پیوندیم سه بر متساوی الاضلاعی در دائره محاط خواهد شد ولی در سه بر AFC داریم:

$$AC^۲ = FC^۲ - AF^۲$$

وازسوی دیگر $FC = ۲R$ و $AF = R$ پس

$$AC^۲ = ٤R^۲ - R^۲ = ۳R^۲$$

و از آنجا

$$\boxed{C_۳ = AC = R\sqrt{۳}}$$

ولی چون پیکر AOCB لوزی است AC بر OB ستونی‌بوده و آنرا بدو پاره برابر یکدیگر بخش می‌کند از آنجا خواهیم داشت.

$$\boxed{a_۳ = \frac{OB}{۲} = \frac{R}{۲}}$$

٤٤۳ – مسئله – می خواهیم در دائره (O,R) ده بر منتظمی محاط کرده و اندازه درازای پهلوی آن و پرتو دائره محاط در آنرا بدست آوریم.

گشایش – اگر پیرامون دائره (O,R) را بده پاره برابر یك دیگر بخش کرده باشیم و A و B و C و . . . و L نقطه های بخش باشند در سه بر OAB داریم:

$$\widehat{AOB} = \frac{٤}{۱۰}\text{راست} = \frac{۲}{٥}\text{راست}$$

وچون این سه بر متساوی الساقین است پس:

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \left(\frac{۲ - \frac{۲}{٥}}{۲}\right)\text{راست} = \frac{٤}{٥}\text{راست}$$

حال اگر نیمساز گوشه $\widehat{OAB}$ را بکشیم و I نقطهٔ برخورد آن با OB باشد سه بر AIB نیز متساوی الساقین است زیرا داریم .

پ ۳۵۶

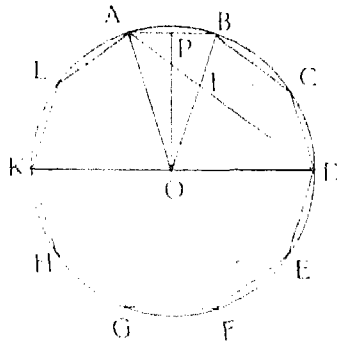
$$\widehat{IAB}=\frac{\widehat{OAB}}{۲}=\frac{۲}{۵}\text{راست}$$

پس :

$$\widehat{AIB}=\left[۲-\left(\frac{۲}{۵}+\frac{۴}{۵}\right)\right]\text{راست}=\frac{۴}{۵}\text{راست}$$

از آنجا

$$\widehat{AIB}=\widehat{IBA}$$

و

$$AB=AI$$

همچنین سه‌بر AIO متساوی الساقین است زیرا داریم :

$$\widehat{OAI}=\frac{\widehat{OAB}}{۲}=\frac{۲}{۵}\text{راست}$$

و $\widehat{AOI} =$ راست $\frac{۲}{۵}$

پس

$$\widehat{OAI} = \widehat{AOI}$$

و

$$AI = OI$$

ولی از روی (قضیه۲٤۸) خواهیم داشت

$$\frac{OI}{IB} = \frac{OA}{AB}$$

و چون

$$C_{۱۰} = AB = AI = OI$$

پس

$$C_{۱۰}^{۲} = OI^{۲} = OA \times IB$$

و یا

$$C_{۱۰}^{۲} = OI^{۲} = OB \times IB$$

ازاینرو می‌توان اندازه درازای OI یا $C_{۱۰}$ را از روی (مسئله ۲٦٤) یا باروش زیر بدست آورد.

دو میان بر ستونی بر یکدیگر در دائره (O,R) می کشیم اگر P و R دو سر یك میان بر و A و Q دو سر میان‌بر دیگر باشند دائره (O') را به میان بر OP می‌کشیم ونقطهٔ A را به نقطهٔ O' می پیوندیم تا بدائره (O') در نقطه‌های M و N بر بخورد از روی (قضیه ٤۱۳) خواهیم داشت:

$$AO^{2} = AM \times AN$$

و از آنجا

$$\frac{AO}{AM} = \frac{AN}{AO}$$

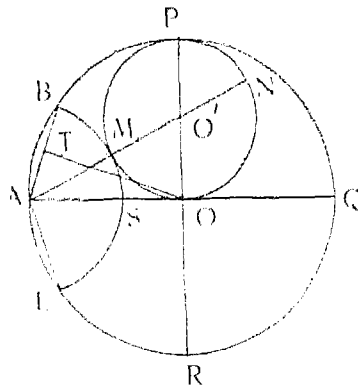
و یا

$$\frac{AO - AM}{AM} = \frac{AN - AO}{AO}$$

اگر روی پاره خط AO نقطهٔ S را بدانسان بگیریم که $AS = AM$ باشد ازروی (قضیه۱۵۳) نقطه S روی پاره‌خط AO است پس داریم.

ب ۳۵۷

$$AO - AM = AO - AS = SO$$

و

$$AN - AO = AN - MN = AM = AS$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{SO}{AS} = \frac{AS}{AO}$$

و از آنجا

$$AS^{۲} = AO \times SO$$

پس

$$AS = C_{۱۰}$$

و برای بدست آوردن B بمرکز A و پرتو AM=AS دائره‌ای می‌کشیم تا بدائره (O) در نقطهٔ B بر بخورد و بهمین گونه نقطه های دیگر C و D و .... و L را بدست می‌آوریم برای بدست آوردن اندازه درازای $C_{۱۰}$ باید AM=AS را پیدا کرد:

در سه بر راست گوشه AOO' (پ۳۵۷) داریم:

$$AO'^{۲} = AO^{۲} + OO'^{۲} = R^{۲} + \frac{R^{۲}}{۴} = \frac{۵R^{۲}}{۴}$$

یا

$$AO' = \frac{R\sqrt{۵}}{۲}$$

پس

$$AM = AS = AO' - MO' = \frac{R\sqrt{۵}}{۲} - \frac{R}{۲}$$

و از آنجا

$$\boxed{C_{۱۰} = AM = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵} - ۱)}$$

اگر T پای خط ستونی باشد که از O بر پهلوی AB از ده‌بر منتظم فرود آمده در سه‌بر راست گوشه OAT داریم.

$$a_{10}^2 = OT^2 = R^2 - \left[\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)\right]^2$$

و از آنجا

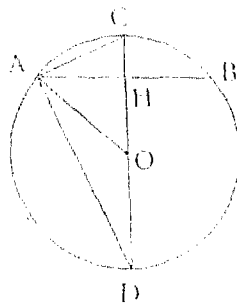
$$a_{10}^2 = \frac{R^2}{16}(10 + 2\sqrt{5})$$

یا

$$\boxed{a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

۴۴۳ - مسئله - اگر C_n اندازه درازای یك پهلوی n بر منتظم محاطی در دائره (O,R) باشد می‌خواهیم از روی آن اندازه درازای پهلوی $2n$ بر محاطی در همین دائره یا بگفته دیگر C_{2n} را بدست آوریم.

گشایش - اگر دردائره (O,R) داشته‌باشیم $C_n = AB$ چنانچه C میان کمان روبروی زه AB باشد خواهیم داشت

$$C_{2n} = AC$$

پ ۳۵۸

اگر D سر دیگر میان بری از دائره (O,R) باشد که از C می‌گذرد و H را نقطه برخورد این میان‌بر با AB بگیریم درسه‌بر

راست گوشه ACD از روی (۲۲۳) خواهیم داشت .

$$AC^۲ = CD \times CH$$

ویا

$$AC^۲ = ۲R \times CH$$

ولی

$$CH = CO - HO$$

ودر سه برراست گوشه HOA داریم

$$HO^۲ = R^۲ - AH^۲$$

و چون

$$AH = \frac{C_n}{۲}$$ (قضیه ۱۵۰)

پس

$$HO^۲ = R^۲ - \frac{C_n^۲}{٤}$$

ویا

$$HO = \sqrt{R^۲ - \frac{C_n^۲}{٤}}$$

و ازآنجا

$$CH = R - \sqrt{R^۲ - \frac{C_n^۲}{٤}}$$

پس

$$AC^۲ = ۲R\left(R - \sqrt{R^۲ - \frac{C_n^۲}{٤}}\right)$$

و یا

$$C_{2n} = CA = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{C_n^2}{4}}\right)}$$

و یا

$$C_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - C_n^2}\right)}$$

٤٤٤- یادآوری - در دستور

$$C_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - C_n^2}\right)}$$

می توان بآسانی C_n را از روی C_{2n} بدست آورد:

$$C_n = \frac{C_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - C_{2n}^2}$$

۴۴۵- مسئله - اگر C_n اندازه درازای یك پهلوی n بر منتظم محاطی در دائره (O,R) باشد می‌خواهیم اندازه درازای پهلوی n بر منتظم محیطی بر همین‌دائره یابگفته دیگر C'_n را بدست آوریم.

پ ۳۵۹

گشایش - اگر دردائره (O,R) داشته باشیم $C_n = AB$ واگر

A' نقطه‌برخورد دومماسی باشد که در A و B بر دائره کشیده‌شده‌اند و H را نقطهٔ‌برخورد OA' با OB بگیریم روشن است که H پای خط ستونی است که از O یا A' بر AB فرود آمده (قضیه ۹۲) پس:

$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{C_n}{۲}$$

و

$$AA' = \frac{C'_n}{۲}$$

در سه بر راست گوشه AA'H داریم

$$AA'^۲ = AH^۲ + A'H^۲$$

وچون در سه بر راست گوشه AA'O داریم

$$AH^۲ = OH \times A'H \quad \text{(فرع ۲۲۵)}$$

و در سه بر راست گوشه OAH

$$OH = \sqrt{R^۲ - AH^۲}$$

از اینرو

$$AH^۲ = A'H\sqrt{R^۲ - AH^۲}$$

و یا

$$A'H = \frac{AH^۲}{\sqrt{R^۲ - AH^۲}}$$

و از آنجا

$$A'H^۲ = \frac{AH^۴}{R^۲ - AH^۲}$$

پس خواهیم داشت

$$A'A^2 = \frac{AH^4}{R^2 - AH^2} + AH^2$$

و یا

$$AA'^2 = \frac{AH^2 \times R^2}{R^2 - AH^2}$$

پس

$$\frac{C'^2_n}{4} = \frac{\frac{C^2_n}{4} \times R^2}{R_2 - \frac{C^2_n}{4}}$$

و از آنجا

$$C'^2_n = \frac{4R^2 C^2_n}{4R^2 - C^2_n}$$

و یا

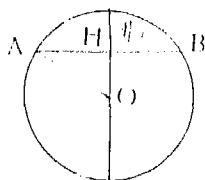
$$\boxed{C'_n = \frac{2RC_n}{\sqrt{4R^2 - C^2_n}}}$$

۴۴۶ – یادآوری – از دستور

$$C'_n = \frac{2RC}{\sqrt{4R^2 - C^2_n}}$$

میتوان C_n را از روی C'_n بدست آورد.

$$C_n = \frac{2RC'_n}{\sqrt{4R^2 + C'^2_n}}$$

۴۴۷ – یادآوری – اگر $AB = C$ یک پهلوی n بر منتظم محاط در دائره (O,R) باشد و $a_n = OH$ دوری مرکز این دائره از AB

پ ۳۶۰

گرفته شود در سه بر راست گوشه OAH بدست می‌آید

$$a_n = \sqrt{R^۲ - \frac{C_n^۲}{۴}}$$

۴۴۸ – اگر در دستورهای

$$C_n = \frac{C_{۲n}}{R}\sqrt{۴R^۲ - C_{۲n}^۲}$$

و

$$a_n = \sqrt{R^۲ - \frac{C_n^۲}{۴}}$$

n را برابر با پنج گرفته و بگذاریم .

$$C_{۲n} = C_{۱۰} = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵} - ۱)$$

بدست می‌آید

$$C_۵ = \frac{R}{۲}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}$$
$$a_۵ = \frac{R}{۴}(\sqrt{۵} + ۱)$$

۴۴۹ ـ اگر در دستورهای

$$C_{2n}=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-C_n^2})}$$

و

$$a_{2n}=\sqrt{R^2-\frac{C_2^2}{4}}$$

۱ ـ n را برابر با ۴ گرفته و بگذاریم

$$C_n=C_4=R\sqrt{2}$$

بدست می‌آید:

$$C_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$a_8=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

۲ ـ n را برابر با ۸ گرفته و بگذاریم

$$C_n=C_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

خواهیم داشت

$$C_{16}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$a_{16}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

۳ ـ n را برابر باشش گرفته و بگذاریم.

$$C_n=C_6=R$$

خواهیم داشت

$$C_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$a_{12}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

۴۵۰ ــ اگر در دستور

$$C'_n = \frac{2RC_n}{\sqrt{4R^2 - C^2}}$$

n را برابر با ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۶ بگیریم به دست می‌آید :

$$C'_3 = 2R\sqrt{3}$$

$$C'_4 = 2R$$

$$C'_5 = 2R\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

$$C'_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$$C'_8 = 2R(\sqrt{2} - 1)$$

$$C'_{10} = 2R\frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}$$

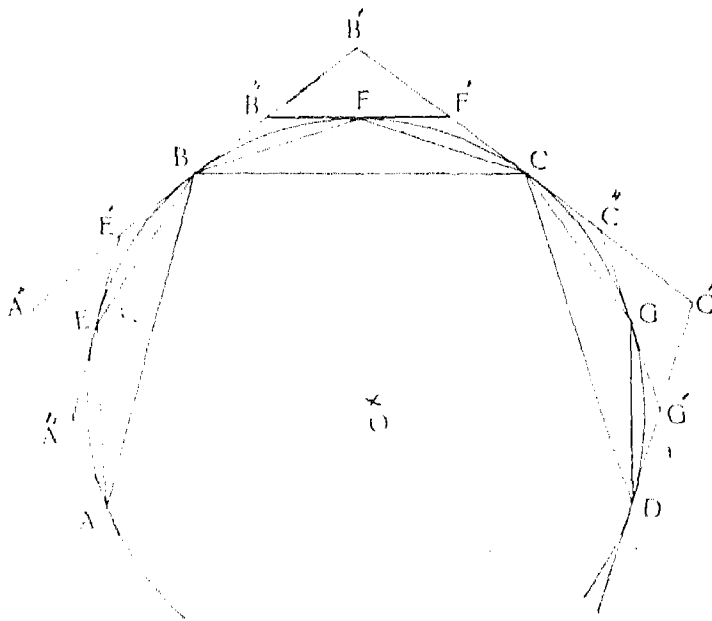
$$C'_{12} = 2R\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$C'_{16} = 2R(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2} - 1)$$

۴۵۱ ــ **قضیه** ــ اگر p_1 و p_2 و p_4 و .... پیرامون‌های n بر و $2n$ بر و $4n$ بر و .... منتظم محاطی و p'_1 و p'_2 و p'_4 و .... پیرامون های n بر و $2n$ بر و $4n$ بر و .... منتظم محیطی بر دائره (O,R) باشند همواره داریم

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

برهان ۱ـ اگر در دائره (O,R) چندبر منتظم محاطی .... ABCD را داشته باشیم و کمانهای روبروی زه‌هائی AB و BC و CD و ... را بدو پاره برابر بخش کنیم تا نقطه های E و F و G و ... بدست آیند نقطه‌های A و E و B و F و C و G و D و .... تارکهای $2n$ بر منتظم محاطی در دائره (O,R) خواهند بود که محیط بر n بر منتظم محاطی ... ABCD

پ ۳۶۱

می‌باشد پس از روی (فرع ۸٤) داریم :

$$p_1 < p_2$$

و اگر بهمین گونه پیش رویم خواهیم داشت .

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots$$

۲ ـ اگر در تارکهای n بر ABCD . . . و در تارکهای $2n$ بر AEBFCGD . . . بر دائره مماسهائی بکشیم n بر منتظم محیطی A'B'C' . . . . . . و $2n$ بر منتظم محیطی A"E'B"F'C"G' . . . بر دائره (O,R) بدست می آیند .

ولی n بر A'B'C' . . . . . بر $2n$ بر A'E'B'F'C"G' محیط است پس از روی (فرع ۸٤) خواهیم داشت :

$$\cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

۳ ـ چون هر یك از چند بر های منتظم محیطی دائره (O,R) محیط بر چندبرهای منتظم محاطی درهمین دائره است پس ازروی (فرع۸٤) خواهیم داشت .

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

۴۵۳ ـ قضیه ـ اگر p_1 و p_2 و p_4 و . . اندازه‌های پیرامونهای n بر و $2n$ بر و $4n$ بر و . . . منتظم کوژ محاطی و p'_1 و p'_2 و p'_4 و . . . اندازه‌های پیرامون‌های nبر و $2n$ بر و $4n$ بر و . . . منتظم کوژ محیطی دائره (O,R) باشند همواره عددی مانند p یافت می شود بدانسانکه داشته باشیم .

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots < p < \cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

برهان - چون از روی قضیه بالا داریم:

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

پس روی ($\overrightarrow{u}$) بخاستگاه O دو رده نقطه میتوانیم بیابیم A نقطه‌ای از رده نخست است اگر $\overline{OA}$ دست کم از یکی از عدد های p_1 و p_2 و p_4 و ... کوچکتر باشد.

B نقطه‌ای از رده دوم است اگر $\overline{OB}$ از همه عددهای p_1 و p_2 و p_4 و ... بزرگتر باشد از اینرو هر نقطه که روی پاره خط AB جادارد از یکی از این دو رده بوده وهر نقطه از رده نخست این پاره خط میان A و هر یك از نقطه‌های رده دوم جا دارد و پس از روی (اصل ز / ۱۷) یك نقطه مانند X درمیان A و B یافت می‌شود بدانگونه که

O $\vec{u}$ A X B

ب ۳۶۲

همه نقطه‌های رده نخست (واقع روی پاره خط AB) درمیان AX و همه نقطه های رده دوم (واقع روی پاره خط AB) در میان BX جا دارند.

اگر $OX = p$ باشد p را حد بالای p_1 و p_2 و p_4 و ... گویند و داریم:

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots < p$$

بهمین گونه استوار میشود که p'_1 و p'_2 و p'_4 و ... دارای یك حد پائینی مانند p' می‌باشند وداریم .

$$p' < \cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

و از نابرابریهای

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

روشن می‌شود که داریم

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots\cdots < p \leq p' < \cdots\cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

ولی از دستور :

$$C'_n = \frac{2RC_n}{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}$$

برمی‌آید

$$\frac{C'_n}{C_n} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}$$

و از آنجا

$$\frac{nC'_n}{nC_n} = \frac{p'_1}{p_1} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}$$

واز سوی دیگر

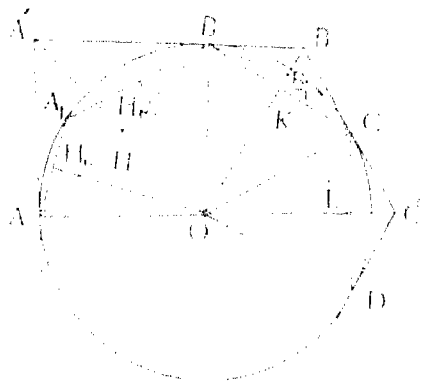
$$C_n = \frac{p_1}{n}$$

هنگامی که n بسیار بزرگ شود p_1 نیز بزرگ میگرد ولی همواره از p کوچکتر می‌ماند پس C_n از کوچکترین عددی که بخواهیم کوچکتر می گردد یابگفته دیگر هنگامی که n بی‌پایان می شود C_n برابر باصفر خواهد شد پس خواهیم داشت :

$$\frac{p'}{p} = \frac{۲R}{\sqrt{٤R^۲}} = ۱$$

وعدد p که میخواهیم همان عدد p یا p' است .

۴۵۳ - فرع — اندازه پیرامون هر چند بر کوژ محاطی یا محیطی دائره (O,R) هنگامیکه هر یك از این پهلوها بی‌اندازه کوچك گردند همان عدد p خواهد بود .

برهان - اگر در دائره (O,R) یك m_1 بر کوژ محاطی

پ ۳۶۳

ABC . . . داشته‌باشیم و . . . A'B'C' یك m_1 بر کوژ محیطی بوده که پهلوهای آن از مماسهای بر این دائره در نقطه‌های A و B و C . . . پدید

آمده باشند چنانچه روی هر یك از کمانهای رو بروی زه‌های AB و BC و . . . دست کم یك نقطه‌ مانند A_1 و B_1 و . . . بگیریم m_2 بر کوژ محاطی $AA_1BB_1\cdots$ بدست می‌آید و چون از تارکهای این چندبر مماسهائی بر دائره بکشیم m_2 بر کوژ محیطی خواهیم داشت و هر گاه این کار را پی در پی انجام دهیم m_1 بر و m_2 بر و m_3 بر و ... بر های کوژ محاطی که اندازه پیرامونهای آنها l_1 و l_2 و l_3 و ... و m_1 بر و m_2 بر و m_3 بر و . . . بر های کوژ محیطی که دارای پیرامون های l'_1 و l'_2 و l'_3 و . . . می باشند خواهیم داشت روشن است که می توان نوشت :

$$l_1 < l_2 < l_3 < \cdots < l'_3 < l'_2 < l'_1$$

ولی اگر p_1 و p_2 و p_4 و . . . اندازه‌های پیرامونهای n بر و $2n$ بر و $4n$ بر و . . . منتظم محاطی و p'_1 و p'_2 و p'_4 و . . . اندازه پیرامونهای n بر و $2n$ بر و $4n$ بر . . . . منتظم محیطی در دائره (O,R) باشند داریم :

$$l_1 < l_1 < l_3 < \cdots < p'_4 < p'_2 < p'_1$$

$$p_1 < p_2 < p_4 < \cdots < l'_3 < l'_2 < l'_1$$

از آنجا l_1 و l_2 و l_3 و . . دارای حد بالائی مانند l و همچنین l'_1 و l'_2 و l'_3 دارای حد پائینی مانند l' خواهند بود بدانسانکه :

$$l_1 < l_2 < l_3 < \cdots < l \leq P \leq l' < \cdots < l'_3 < l'_2 < l'_1$$

از سوی دیگر OA' پهلوی AB را در نقطهٔ میانگاه H می‌برد و داریم:

$$\frac{AA' + A'B}{AB} = \frac{AA'}{AH}$$

وچون دوسه‌بر OAA' و OAH همانندانند خواهیم‌داشت:

$$\frac{AA'}{AH} = \frac{OA}{OH} = \frac{R}{OH}$$

و از آنجا

$$\frac{AA' + A'B}{AB} = \frac{R}{OH}$$

وبهمین گونه اگر K نقطهٔ برخورد OB' با BC باشدخواهیم داشت:

$$\frac{BB' + B'C}{BC} = \frac{R}{OK}$$

و از اینرو:

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{AA' + A'B + BB' + B'C + \cdots}{AB + BC + CD + \cdots}$$

ولی این نسبت از کوچکترین نسبت‌های $\frac{R}{OH}$ و $\frac{R}{OK}$ و ... بزرگتر و از بزرگترین این نسبت ها کوچکتر است پس هنگامی که همه پهلوهای چند بر کوژ محاطی یامحیطی بی‌اندازه کوچك شوند ویا بگفته دیگر هنگامی که بجای m_1 بر کوژ محاطی یامحیطی m_2 برو

یا m_3 برویا ... بررا بگیریم OH و OK و ... نزدیك و سرانجام برابر با R میشوند ونسبت های $\frac{R}{OH}$ و $\frac{R}{OK}$ و .... نزدیك وسرانجام برابر با یك می گردند وازآنجا خواهیم داشت .

$$\frac{l'}{l}=1$$

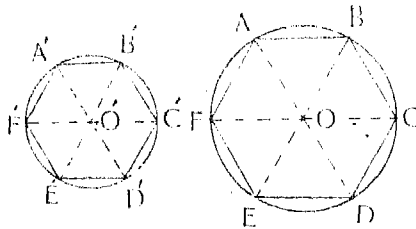
پس $$l=P=l'$$

٤۵٤ - تعریف - چنانکه دیدیم پیرامون هر چند بر کوژ محاطی یا محیطی در دائره (O,R) هنگامی که هریك از پهلوهای آن ها بی‌اندازه کوچك شوند دارای حد بالا یا حد پائینی برابر با p می‌باشد .

عدد p را **اندازه پیرامون دائره** (O,R) گویند .

۴۵۵ - قضیه - اگر p و p' اندازه های پیرامونهای دو دائره (O,R) و (O',R') باشند همواره داریم :

$$\frac{p}{p'}=\frac{R}{R'}$$

پ ۳٦٤

برهان - اگر درهریك از دودائره (O,R) و (O',R') یك n بر

منتظم کوژی محاط کنیم چنانچه AB و A'B' دو پهلو از این دو n بر منتظم باشند سه برهای OAB و O'A'B' همماننداند از آنجا خواهیم داشت :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{R}{R'}$$

و یا

$$\frac{n.AB}{n.A'B'}=\frac{p}{p'}=\frac{R}{R'}$$

۴۵۶ - فرع - نسبت پیرامون هر دائره به میان بر آن عددی است ثابت .

برهان - اگر p و p' اندازه‌های پیرامونهای دو دائره دلخواه (O,R) و (O',R') باشند ازروی قضیه بالا داریم .

$$\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$$

و از آنجا

$$\frac{P}{R}=\frac{P'}{R'}$$

و یا

$$\frac{P}{۲R}=\frac{P'}{۲R'}$$

۴۵۷ — تعریف — نسبت پیرامون هر دائره را به میان بر آن که عددی است ثابت به π مینمایند ومینویسند .

$$\frac{P}{۲R}=\pi$$

و از آنجا اندازه پیرامون یك دائره (O,R) چنین میشود .

$$P = ۲\pi R$$

۴۵۸ — حساب کردن عدد π — اگر دائره $(O,\frac{۱}{۲})$ داشته‌باشیم و P اندازه پیرامون آن باشد خواهیم داشت .

$$P = \pi$$

پس برای حساب کردن π میتوان اندازه پیرامون های n بر و $۲n$ بر و $۴n$ برو .... منتظم کوژ محاطی ومحیطی را حساب کرد و بدینسان عددهائی بیش ازبیش نزدیك به π (کوچکتر یابزرگتراز π) بدست آورد .

اگر n را برابر با ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ و .... و $P_۴$ و $P_۸$ و $P_{۱۶}$ و $P_{۳۲}$ و ... و $P'_۴$ و $P'_۸$ و $P'_{۱۶}$ و $P'_{۳۲}$ و .... را اندازه‌های پیرامونهای ۴ بر و ۸ بر و ۱۶ بر و ۳۲ بر و ... منتظم کوژ محاطی یا محیطی بگیریم خواهیم داشت :

$$P_۴ = ۲\sqrt{۲} \qquad P'_۴ = ۴$$

$$P_۸ = ۴\sqrt{۲ - \sqrt{۲}} \qquad P'_۸ = ۸(\sqrt{۲} - ۱)$$

$$P_{۱۶} = ۸\sqrt{۲ - \sqrt{۲ + \sqrt{۲}}} \qquad P'_{۱۶} = ۱۶(\sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}} - \sqrt{۲} - ۱)$$

....

....

و ازآنجا

$$۲\sqrt{۲} < \pi < ۴$$

$$\text{و} \quad ٤\sqrt{٢-\sqrt{٢}} < \pi < ٨(\sqrt{٢}-١)$$

$$\sqrt{٢-\sqrt{٢+\sqrt{٢}}} < \pi < ١٦(\sqrt{٤+٢\sqrt{٢}}-\sqrt{٢}-١)$$

....

....

از نابرابریهای بالا عدد هائی که در راست π نوشته شده اند اندازه‌های افزایشی نزدیك به π وعددهائی که در چپ π نوشته‌شده‌اند اندازه های کاهشی نزدیك به π میباشند و اگر برای π یك اندازه افزایشی یا یك اندازه کاهشی نزدیك بگیریم خطائی که کرده‌ایم کوچکتر از تفاضل این دو اندازه است .

بایك حساب درست اندازه π را چنین بدست آورده‌اند

$$\pi = ٣/١٤١٥٩٢٦٥٣٥ \cdots$$

اگر بگیریم ٣/١٤ = π خطائی که می کنیم که از ٠/٠١ کمتر است و اگر بگیریم ٣/١٤١٦ = π خطائی که‌می کنیم از ٠/٠٠٠١ کوچکتر است (درحال نخست اندازه π کاهشی نزدیك ودرحال دوم افزایشی نزدیك می‌باشد)

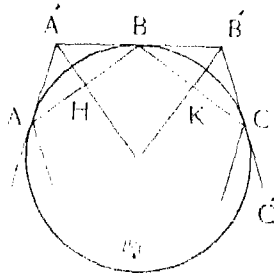
ارشمیدس عدد $\frac{٢٢}{٧} = ٣/١٤٢$ را بجای π می گرفت (باخطائی کمتر از ٠/٠٠١)

متیوس عدد $\frac{٣٥٥}{١١٣} = ٣/١٤١٥٩٢٦$ را بجای π می گرفت (با خطائی کمتر از ٠/٠٠٠٠٠٠١)

۴۵۹ - یاد آوری - اندازه درازای یك کمان از دائره -
بهمان گونه که اندازه پیرامون یك دائره را حد بالای اندازه های پیرامون‌های چندبرهای محاطی یاحد پائین اندازه های پیرامونهای چندبرهای محیطی (هنگامی که هر یك از پهلوهای آنها بی اندازه کوچك گردد) گرفتیم بهمین گونه نیز میتوانیم اندازه درازای کمانی از دائره (O,R) را حد بالا یاحد پائین اندازه درازای خط شکسته باز بدوسر A محاطی یامحیطی این کمان بگیریم هنگامی که هر یك از پاره خط های دوخط شکسته بی‌اندازه کوچك شود ازاینجاچنین برمی‌آید:

۱ - هر زه AB از هر یك از دو کمان $\widehat{AB}$ کوچك تر است (قضیه۸۱)

۲ - نسبت درازای زه AB به‌درازای $\widehat{AB}$ برابر بایك‌می گردد هنگامی که زه AB بی‌اندازه کوچك‌شود زیرا اگر 'A نقطه‌برخورد

پ ۳٦٥

دوسایای (مماس) دائره در نقطه های A و B بوده و H نقطهٔ برخورد 'OA با AB باشد چنانکه در (فرع ٤٥٣) دیدیم داریم:

$$\frac{AA' + A'B}{AB} = \frac{R}{OH}$$

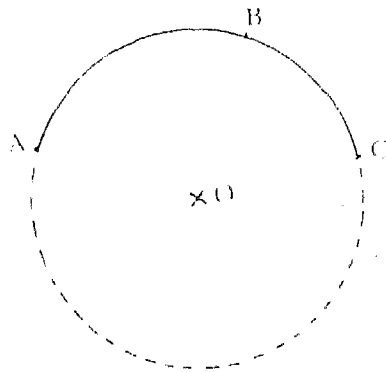
و هنگامی که زه AB بی اندازه کوچك می شود این نسبت برابر بایك می گردد وازسوی دیگر ازروی تعریف داریم .

$$AB < \widehat{AB} < AA' + A'B$$

پس اگر زه AB بی اندازه کوچك شود نسبت درازای زه AB به درازای کمان $\widehat{AB}$ برابر بایك می گردد .

۳ ـ دو کمان برابر در یك دائره یادو دائره برابر دارای یك اندازه درازا می‌باشند زیرا خط‌های شکسته‌ای راکه این کمانهاحد بالا یا پائین آنها می‌باشند می‌توان یکی یا برابر یکدیگر گرفت .

مجموع دو کمان AB و BC کمانی است که اندازه درازای آن مجموع اندازه‌های درازاهای دو کمان داده شده است .

زیرا برای بدست آوردن اندازه درازای $\widehat{AC}$ بسنده است خط

پ ۳۶۶

های شکسته‌ای راگرفت که هریك از آنها از دوخط شکسته‌ای پدید آمده‌اند که برای بدست آوردن $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ باید گرفته شود .

از اینرو اگر داشته باشیم .

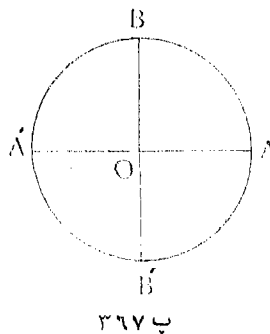
$$\widehat{AC} = p\,\widehat{AB}$$

یا بگفته دیگر بزرگی $\widehat{AC}$ برابر با $p.\widehat{AB}$ باشد .

بآسانی میتوان دید که اندازه درازای $\widehat{AC}$ نیز p برابر اندازه درازای $\widehat{AB}$ خواهد بود .

پس از آنچه که در بالا دیدیم میتوان اندازه $\widehat{AB}$ را با خود $\widehat{AB}$ نمایش داد .

۴۶۰ -- یکه‌های کمان و گوشه - ۱- اگر در دائره (O,R) دو میان بر 'AA و 'BB را ستونی بر یکدیگر بکشیم می‌دانیم دائره به چهار کمان برابر یکدیگر بخش میشود از روی (قضیه۴۷) میتوانیم هر یك از این کمانها را به ۹۰ یا ۱۰۰ کمان برابر یکدیگر بخش

پ ۳٦۷

کنیم بدینسان دائره به ۳٦۰ یا ٤۰۰ کمان برابر یکدیگر بخش خواهد شد .

در حال نخست هر یك از این بخش‌ها را یك زینه (درجه) و در حال دوم یك گراد گویند .

گوشه مرکزی رو بروی یك زینه را نیز **گوشه یك زینه** و گوشه مرکزی روبروی یك زینه را نیز **گوشه یك گراد** گویندزینه را بانشانه (°) وگراد را با (g) مینمایند.

از اینرو میتوان گفت گوشه ۹۰ زینه یا گوشه ۱۰۰ گراد همان گوشه راست است.

$\frac{۱}{۶۰}$ زینه را دقیقه با نشانه زبر (′) و $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه را ثانیه با نشانهٔ دوزبر (″) گویند.

بخش های هر گراد دهدهی میباشد مانند

$$۳^{g}/٤۷٥٦$$

گاهی $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد را دقیقه گراد و $\frac{۱}{۱۰۰}$ دقیقه گراد را ثانیه گراد می گویند و آنهارا بانشانه یك زبر (′) ودوزبر (″) مینمایند بدینسان

$$۳^{g}/٤۷٥٦$$

چنین نوشته میشود

$$۳^{g}/٤۷'٥٦'' ...$$

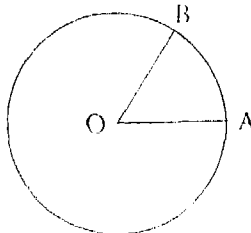
۲ ـ اگر دردائره (O,R) کمان یکه‌ای بدرازای پرتو بگیریم اندازه بزرگی دائره برابر با ۲π خواهد بود یابگفته دیگر نسبت اندازه پیرامون یا ۲πR به درازای پرتو یا R برابر با π میشود.

کمانی که بدرازای پرتو دائره باشد کمان **یك رادیان** و همچنین گوشه مرکزی روبروی این کمانرا گوشه **یك رادیان** گویند از اینرو هر گوشه راست برابر با $\frac{π}{۲}$ رادیان است.

۴۶۱ – از تعریف های بالا چنین برمی‌آید که اگر کمان $\widehat{AB}$ برابر با a زینه و b گراد و c رادیان باشد خواهیم داشت:

$$\frac{a}{۳۶۰}=\frac{b}{۴۰۰}=\frac{c}{۲\pi}$$

۴۶۲ – ورزش – از روی دستور بالا اندازه هریك از یکه های کمان یا گوشه را از روی دوتای دیگر بدست آورید.

۴۶۳ – اندازه درازای کمانی که گوشه مرکزی روبروی آن داده شده باشد – اگر در دائره (O,R) اندازه کمان $\widehat{AB}$ برابر c رادیان واندازه گوشه‌روبروی این کمان a زینه‌و b گراد باشدروشن است که درازای کمان $\widehat{AB}$ برابر با $c.R$ میشود.

پ ۳۶۸

پس از روی دستور

$$\frac{a}{۳۶۰}=\frac{c}{۲\pi}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{a}{۳۶۰}=\frac{c.R}{۲\pi R}=\frac{\widehat{AB}}{۲\pi R}$$

و از آنجا

$$\widehat{AB} = \frac{۲\pi Ra}{۳۶۰} = \frac{\pi Ra}{۱۸۰}$$

و نیز از دستور :

$$\frac{b}{۴۰۰} = \frac{c}{۲\pi}$$

خواهیم داشت :

$$AB = \frac{\pi Rb}{۴۰۰}$$

۴۶۴ - ورزش - استوار کنید اگر در دائره ای R برابر با یك باشد اندازه درازای هر کمان واندازه گوشه مرکزی روبروی آن از روی رادیان بایك عدد نموده می شوند .

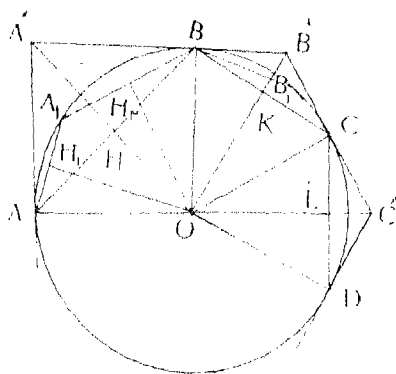
۴۶۵ - قضیه - ۱ - در دائره (O,R) پهنه‌هر چندبر کوژ محاطی بزرگ و پهنه هرچندبر کوژ محیطی کوچك می‌شود اگر هر یك از پهلوها کوچك گردند .

۲ - پهنه هر چند بر کوژ محاطی یا محیطی در دائره (O,R) هنگامی که هریك از پهلوهای آنها بی‌اندازه کوچك‌شوند باهم‌برابر می گردند .

برهان - ۱ - اگر یك $m_۱$ بر کوژ محاطی در دائره (O,R) مانند ... ABCD داشته‌باشیم و ... A'B'C'D' یك $m_۱$ بر کوژ محیطی باشد که پهلوهای آن از سایاهای بر دائره در نقطه های A و B و C و .... پدیدآمده‌است چنانچه $S_۱$ پهنه .... ABCD و $S'_۱$ و $l'_۱$ پهنه وپیرامون .... A'B'C'D' بوده و H و K و .... پای ستونهائی‌باشند که از O به AB و BC و ... فرودآمده خواهیم داشت .

$$S_1 = (AB \times \frac{OH}{۲}) + (BC \times \frac{OK}{۲}) + \cdots$$

$$S'_1 = A'B' \times \frac{R}{۲} + B'C' \times \frac{R}{۲} + \cdots = l'_1 \times \frac{R}{۲}$$

چنانچه روی هریك از کمانهای روبروی زه های AB و BC دست کم یك نقطه مانند A_1 و B_1 و ... بگیریم $m_۲$ بر کوژ محاطی $AA_1BB_1\ldots$ بدست می‌آید و چون ازتارکهای این چندبر سایاهائی بر دائره بکشیم $m_۲$ بر کوژ محیطی خواهیم داشت هرگاه این کار را پی در پی انجام دهیم m_1 بر و $m_۲$ بر و $m_۳$ بر و ... برهای کوژ محاطی که پهنه‌های آنها S_1 و $S_۲$ و $S_۳$ و ... و m_1بر و $m_۲$ بر و $m_۳$ بر و ... برهای کوژ محیطی که پهنه‌های آنها S'_1 و $S'_۲$ و $S'_۳$ و ... و پیرامون های آنها l'_1 و $l'_۲$ و $l'_۳$ و ... می باشند خواهیم داشت ؛

پ ۳۶۹

اگر H_1 و $H_۲$ و ... پای ستونهائی باشند که از O بر AA_1 و AB_1 و ... فرود آمده داریم ٫

$$S_2 = (AA_1 \times \frac{OH_1}{2} + A_1B \times \frac{OH_2}{2}) + \cdots$$

و $S'_2 = l'_2 \times \frac{R}{2}$

ولی $l'_2 < l'_1$

پس $S'_2 < S'_1$

وبهمین گونه خواهیم داشت :

$$\cdots < S'_3 < S'_2 < S'_1$$

ونیز S_1 و S_2 هریك از m_1 برخ (جمله) درست شده اند وهر یك از برخهای S_1 مانند ($AB \times \frac{OH}{2}$) کوچکتر از برخ هم پاسخ خود مانند.

$$(AA_1 \times \frac{OH_1}{2} + A_1B \times \frac{OH_2}{2})$$

در S_2 میباشد (زیرا پهنه سه بر OAB از پهنه چهار بر کوژ OAA_1B که این سه بر رادر بردارد کوچکتر است) پس داریم :

$$S_1 < S_2$$

و بهمین گونه خواهیم داشت :

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots$$

و نیز روشن می‌شود که هریك از S_1 و S_2 و S_3 و . . . ازهر یك از S'_1 و S'_2 و S'_3 و . . . . کوچکتر اند از اینرو می توانیم بنویسیم :

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S'_3 < S'_2 < S'_1$$

برهان ۳ – چون داریم :

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots$$

پس پهنه های m_1 بر و m_2 بر و m_3 بر و .... بر های کوژ
محاطی دارای حد بالائی میشوند مانند S بدانسانکه

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S$$

و نیز چون :

$$\cdots < S'_3 < S'_2 < S'_1$$

پس پهنه های m_1 بر و m_2 بر و m_3 بر و ... بر های کوژ
محیطی دارای حد پائینی میشوند مانند S' بدانسانکه

$$S' < \cdots < S'_3 < S'_2 < S'_1$$

و چون داشتیم

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S'_3 < S'_2 < S'_1$$

پس خواهیم داشت :

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S \leq S' < \cdots < S'_3 < S'_2 < S'_1$$

ولی داریم :

$$S'_1 - S_1 = AB \times \frac{A'H}{2} + BC \times \frac{A'K}{2} + \cdots$$

و اگر l_1 پیرامون m_1 بر کوژ محاطی و h_1 بزرگترین عدد های $\frac{A'H}{۲}$ و $\frac{A'K}{۱}$ و . . . . باشد خواهیم داشت .

$$S'_1 - S_1 < l_1 \times h_1$$

هنگامیکه هر یك از پهلوهای چندبر کوژ محاطی بی اندازه کوچك شود چنانکه دیدیم پیرامون آن دارای حدبالائی است که همان پیرامون دائره و یا بگفته دیگر ۲πR است ، دراینحال چون OH و OK و . . . نزدیك وسرانجام برابر با R میشوند و از آنجا A'H و B'K و . . . نزدیك وسرانجام برابر باصفر میگردند پس $S'_1 - S_1$ نیز نزدیك بهصفر وسرانجام برابر باآن خواهدشد یابگفته‌دیگر خواهیم‌داشت.

$$S' = S$$

و

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S < \cdots < S'_3 < S'_2 < S'_1$$

٤٦٦ - پهنه‌رویه‌دائره - حدبالای پهنه‌چندبر های کوژ محاطی یاحدپائین پهنه چندبر های کوژ محیطی دائره (O,R) عددی‌است مانند s = S = S' که آنرا **پهنه رویه‌دائره** گویند .

٤٦٧ - قضیه - پهنه رویه دائره (O,R) برابر است با πR^2

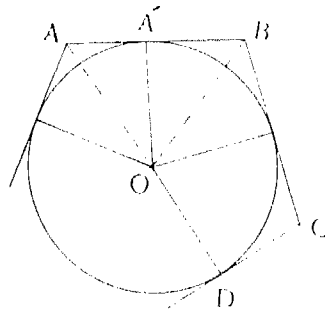
برهان - اگر ABCD . . . چندبر کوژ محیطی دائره (O,R) باشد پهنه آن برابر است با

$$AB \times \frac{R}{۲} + BC \times \frac{R}{۲} + \cdots = (AB + BC + \cdots)\frac{R}{۲}$$

یا بگفته دیگر پهنه آن برابر است با حاصلضرب پیرامونش در $\frac{R}{۲}$

هنگامی که هر یک از پهلوهای این چندبر بی‌اندازه کوچک گردد چنانکه دیدیم پیرامون آن دارای حد پائینی برابر با پیرامون دائره یا بگفته دیگر برابر با $۲\pi R$ است پس از روی تعریف بالا پهنه رویه دائره چنین خواهد بود.

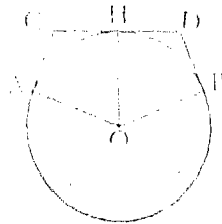
$$s = ۲\pi R \times \frac{R}{۲} = \pi R^{۲}$$

پ ۳۷۰

۴۶۸— تعریف — اگر A و B دو نقطه از دائره (O,R) باشند چنانچه این دو نقطه را به O به پیوندیم نقطه‌های درونی دائره دو بخش میشوند هر یک از این بخش‌ها را **ترك** (قطاع) دائره گویند.

۴۶۹ - پهنه ترك — بهمانگونه که برای پهنه دائره دیدیم میتوان استوار نمود که پهنه هر ترك OAB دائره برابر است با:

۱ - حد بالای پهنه چندبر کوژی که دو پهلوی آن OA و OB

بوده وپهلوهای دیگرش محاط در کمان $\widehat{AB}$ باشند هنگامی که هر یك ازاین پهلوهابی اندازه کوچك شوند.

۲ ـ حدپائین پهنه چندبر کوژی است که دوپهلوی آن OA و OB بوده وپهلوهای دیگرش محیط بر کمان AB باشند هنگامی که هر یك ازاین پهلوهابی‌اندازه کوچك‌شوند.

پ ۳۷۱

پس اگر ACDB خط شکسته ای باشد که هریك از پهلوهای آن بر دائره سایا بوده‌بدانسانکه چندبر OACDB کوژشودپهنه‌این چندبر برابر با

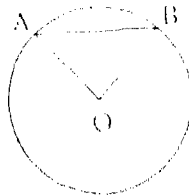
$$(AC+CD+DB)\frac{R}{۲}$$

یابگفته دیگر برابر باحاصل‌ضرب $\frac{R}{۲}$ دراندازه درازای خط شکسته ACDB خواهد بود هنگامی که هریك ازپهلوهای این خط شکسته بی اندازه‌کوچك شود چنانکه میدانیم اندازه درازای آن دارای حد پائینی است برابراندازه درازای کمان $\widehat{AB}$ ازآنجا پهنه ترك OAB چنین می‌شود.

$$\widehat{AB}\times\frac{R}{۲}$$

روشن است که اگر کمان $\widehat{AB}$ برابر با a زینه یا b گراد یا c رادیان باشد خواهیم داشت :

$$\widehat{AB} \times \frac{R}{۲} = \frac{\pi R a}{۱۸۰} \times \frac{R}{۲} = \frac{\pi R b}{۲۰۰} \times \frac{R}{۲} = c\,R \times \frac{R}{۲}$$

۴۷۰- تعریف - اگر A و B روی دائره (O,R) باشند زه AB نقطه های درونی دائره را دو بخش می کند هر یك از این دو بخش را **لخت** (قطعه) دائره می گویند.

پ ۳۷۰

۴۷۱- پهنه لخت - روشن است که اگر $\widehat{AB}$ کمان روبروی زه AB باشد پهنه لختی که از AB و این کمان پدیدآمده برابر خواهد بود با پهنه ترك OAB اگر از آن پهنه سه بر OAB را کم کنیم و اگر $\widehat{AB}$ کمان روبروی زه AB نباشد پهنه لختی از دائره که از AB و این کمان پدید آمده برابر خواهد بود با پهنه ترك OAB اگر به آن پهنه سه بر OAB را بیافزائیم.

گرداندن پیکرها

۴۷۲- تعریف - اگر دو پیکر F و F' بهم چنان وابسته باشند که برای هر نقطه دلخواه از F مانند M دست کم یک نقطه از F' مانند M' بدست آید گوئیم M و F به M' و F' **گردانده** شده اند و گذشتن از M به M' و از F به F' را **گرداندن** و M' و F' را **هم‌پاسخ یا گرداندهٔ** M و F گویند.

میشود پیکری را براه‌های بسیار گرداند.

الف - فراروی (انتقال)

۴۷۳ - تعریف - اگر پیکری مانند F (در یک هامن یا در فضا) جابجا شده و F' جای نوین آن باشد، چنانچه در این جابجا شدن هر بردار وابسته به F باخود برابر بماند گوئیم F' از فراروی (انتقال) F بدست آمده است و داریم:

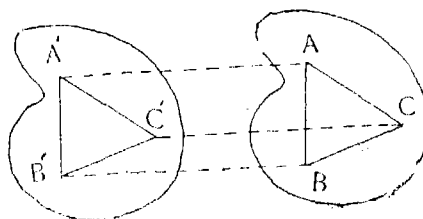
$$F - F' \quad \text{(۱۱ - اصل الف)}$$

۴۷۴ - قضیه - اگر F از F' بدست آمده باشد و نقطه های A' و B' و C' و ... از پیکر F' گرداندههای نقطه های دلخواه A و B و C و ... از F باشند خواهیم داشت.

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \dots$$

برهان - چون F' از فراروی F بدست آمده از روی تعریف (۴۷۳) داریم :

$AB = A'B'$ و $BC = B'C'$ و $CA = C'A'$ و ....

پس از روی (ورزش ۳۷۹) پیکرهای AB B'A' و BC C'B'

پ ۳۷۱

و CA A'C' و .... همروبر (متوازی‌الاضلاع) می باشند و از آنجا خواهیم داشت . $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots$

۴۷۵ - قضیه وارون - اگر پیکر F جابجا شده و F' جای نوین آن باشد چنانچه برای نقطه های دلخواه A و B و C و ... از F و گردانده های آنها A' و B' و C' و ... از F' داشته باشیم :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \cdots$$

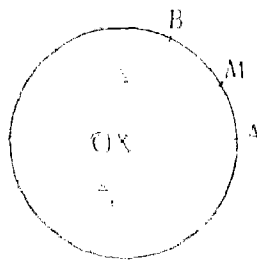
پیکر F' از فراروی پیکر F بدست آمده است .

برهان - استوار کردن این قضیه آسان و بگردن دانش آموزان است .

۴۷۶ - تعریف - اگر پیکر F' از فراروی پیکر F بدست آمده باشد و A نقطه دلخواهی از F و A' گردانده آن از F' باشد ،

می گوئیم $\overrightarrow{F'}$ از فراروی $\overrightarrow{F}$ باندازه $\overrightarrow{AA'}$ بدست آمده است و $\overrightarrow{AA'}$ را بردار فراروی گویند .

ب ـ چرخه (دوران)

۴۷۷ – تعریف — چنانچه A و B دو نقطه دلخواه از یك دائره (O,R) باشند می دانیم دو کمان بدو سر A و B خواهیم داشت (قضیه ٤٠)

ب ۳۷۲

و این دو کمان در دو کنار خط راست AB جا دارند (ورزش ١٤٨)

پس اگر M و M_1 دو نقطه دلخواه روی یکی از دو کمان بدو سر A و B باشند (ازروی اصل های هـ) داریم :

$$(AMB) = (AM_1B)$$

از اینرو وازروی (اصل های هـ) میتوان گفت اگر A و B و M سه نقطه دلخواه از یك دائره (O,R) باشند روی این دائره (AMB) یا (MBA) یا (BAM) یك سو و (BMA) یا (MAB) یا (ABM) سوی دیگر را نشان میدهد (اصل های هـ) یکی از این دو سو را که با سوی گردش عقربه‌های ساعت یکی نیست بانشانه + و سوی دیگر را بانشانه — مینمایند .

اگر روی کمان $\widehat{AMB}$ ازدائره (O,R) سوی (AMB) یاسوی (BMA) را برگزیده باشیم این کمان را کمان برداری گویند.

در حال نخست A را آغاز و B را انجام گفته آنرا چنین مینمایند.

$$\overset{\frown}{AB} \text{ یا } \overset{\frown}{AB}$$

در حال دوم B را آغاز و A را انجام گفته و آنرا چنین مینمایند: $\overset{\frown}{BA}$

۴۷۸ ــ از روی تعریف بالا روشن می‌شود که روی هر دائره (O,R) یك کمان برداری مانند $\overset{\frown}{AB}$ دارای نخستینه‌های زیر است.

۱ - آغاز A

۲ - سوی A به B

۳ - بزرگی یااندازه درازای آن با یك یکه درازا و آن عددی‌است حسابی‌برابر با $Rc=l$ (c اندازه کمان $\widehat{AB}$ ازروی رادیان است) .

۴۷۹ ــ تعریف ــ دو کمان‌برداری $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{A'B'}$ از یك دائره یا از دودائره برابر را برابر هم گویند اگر دارای یك‌سو و یك‌بزرگی باشند وآنها را چنین‌مینمایند.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$$

۴۸۰ ــ تعریف ــ کمان برداری که درازای آن برابر با یکه درازا است کمان برداری یکه مینامند:

۴۸۱ ــ سنجش کمانهای برداری یك دائره یادو دائره برابر -

اگر درروی یك‌دائره یا دودائره دو کمان برداری $\overset{\frown}{AB}$ و$\overset{\frown}{CD}$ داشته باشیم میتوانیم بزرگی یکی از آنهارا بابزرگی دیگری وهم‌چنین

سوی یکی از آنها را باسوی دیگری بسنجیم ازاینرو میتوان نسبت $\overset{\frown}{AB}$ به $\overset{\frown}{CD}$ را بایك عدد جبری نمایش داد. اندازه حسابی این عدد جبری نسبت بزرگی دو کمان برداری ونشانه آن + است اگر $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ دارای یك سو و ـ است اگر $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ دارای دوسو باشند از آنجا اگر $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ دارای یك سو باشند و داشته باشیم :

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = |x|$$

پس خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = x \\ x > 0 \end{cases}$$

واگر $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ دارای دوسو باشند وداشته باشیم .

$$\frac{\overset{\frown}{AE}}{\overset{\frown}{CD}} = |M|$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{cases} \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = x \\ x < 0 \end{cases}$$

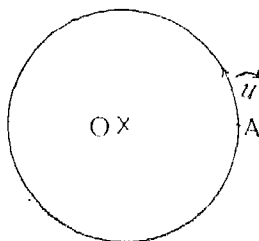
و بوارون .

بستگی $x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}$ را چنین نیز می‌نویسیم

$$\overset{\frown}{AB} = x.\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CD} \times x$$

۴۸۴ - تعریف - دائره سودار - دائره‌ایکه روی آن نقطه‌ای

مانند A بنام خاستگاه و یک سو و یک کمان به بزرگی یکه درازا برگزیده باشیم **دائره سودار** نامیده می‌شود .

پس روی هر دائره سودار یک کمان برداری یکه مانند $\overset{\frown}{u}$ می توان یافت که آغاز آن همان خاستگاه و سوی آن همان سوی دائره سودار باشد .

پ ۳۷۳

وارون ـ هر کمان برداری یکه‌ای مانند $\overset{\frown}{u}$ یک دائره سودار را نشان می‌دهد (پ ۳۷۳)

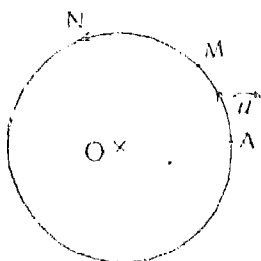
از اینرو هر دائره سودار را با کمان برداری یکه اش که در میانه نشانه ( ) جادارد مینمایندمانند ($\overset{\frown}{u}$) میخوانیم دائره سودار u

۴۸۳ - **دائره مثلثاتی** ـ دائره سوداری که پرتو آن برابر یکه درازا و سوی آن وارون سوی گردش عقربه های ساعت است **دائره مثلثاتی** گویند :

۴۸۴ ـ **اندازه جبری کمان برداری دائره سودار** ـ اگر $\overset{\frown}{MN}$ کمان برداری از ($\overset{\frown}{u}$) باشدو آنرابا $\overset{\frown}{u}$ سنجیده و داشته باشیم :

$$\overset{\frown}{MN} = p . \overset{\frown}{u}$$

عدد جبری p را اندازه جبری کمان برداری $\overset{\frown}{MN}$ گویند :

وارون - اگر عدد جبری n در دست باشد میتوانیم دو نقطه

پ ۳۷۴

از دائره مانند M و N چنان پیدا کنیم که اگر $\widehat{MN}$ را با $\widehat{u}$ بسنجیم نتیجه سنجش عدد جبری n شود.

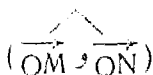
از اینرو در روی هر دائره سودار بجای هر کمان برداری اندازه جبری آنرا میتوان بکار برد.

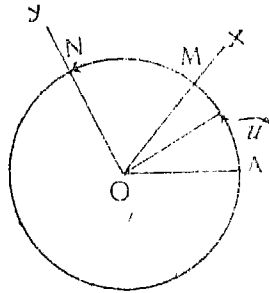
۴۸۵-قضیه شال - اگر روی دائره سوداری چند نقطه A و B و C و ... و K و L داشته باشیم همواره خواهیم داشت:

$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\cdots+\widehat{KL}+\widehat{LA}=2K\pi$$

برهان - این قضیه درست مانند (قضیه ۳۹۰) نخست برای دو نقطه A و B و پس از آن برای سه نقطه A و B و C وسرانجام برای نقطه های A و B و C و ... و K و L باسانی استوار میگردد.

۴۸۶ - **تعریف** - گوشه‌ای را سودار گویند اگر بمرکز تارك آن دائره دلخواهی بکشیم کمان روبروی این گوشه سودار باشد گوشه سودار روبروی کمان برداری $\widehat{MN}$ از دائره (O,R) را چنین می نمایند:

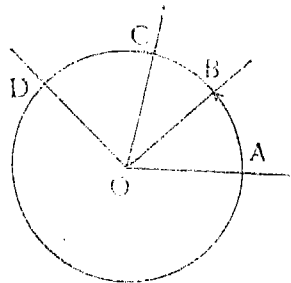
$$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) \qquad (\text{پ ۳۷۵})$$

۴۸۷ ـ از تعریف بالا چنین برمی‌آید :

۱ ـ سنجش دو گوشه سودار مانند سنجش دو کمان‌برداری

پ ۳۷۵

روبروی آنها است اگر این دو کمان برداری ازیك یا از دو دائره برابر باشند ازاینرو از برابری

$$\overset{\frown}{AB} = x.\overset{\frown}{CD}$$

بر می‌آید :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = x.(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}})$$

پ ۳۷۶

۲ ـ گوشه سودار رو بروی کمان برداری یکه $\overset{\frown}{u}$ را گوشه سودار یکه گفته و آنرا چنین مینمائیم $\hat{u}$

۳ ـ اگر روی $(\overrightarrow{u})$ داشته باشیم

$$\widehat{MN} = p.\widehat{u}$$

خواهیم داشت

$$(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) = p \cdot \widehat{u}$$

پس دردائره مثلثاتی چون بزرگی $\overrightarrow{u}$ و $\widehat{u}$ برابر بایك رادیان

اند $\widehat{MN}$ و $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$ ازروی رادیان بایك عدد جبری نموده می‌شوند

۴۸۸ – قضیه شال – برای بردارهای دلخواه $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ و ... و $\overrightarrow{V_n}$

همواره داریم :

$$(\widehat{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}}) + \cdots + (\widehat{\overrightarrow{V_n}, \overrightarrow{V_1}}) = 2K\pi$$

برهان – چون از نقطه دلخواهی مانند O بردار های یکه $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$

و ... و $\overrightarrow{OL}$ را به یك سو و بیك راستا با بردارهای $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ و ... و $\overrightarrow{V_n}$ بکشیم

بسنده است استوار کنیم .

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) + \cdots + (\widehat{\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OA}}) = 2K\pi$$

این بستگی را از روی قضیه (۴۸۴) و از روی تعریف گوشه سودار استوار

می‌توان کرد .

۴۸۹ – تعریف – اگر پیکر F راکه $(\overrightarrow{u})$ از آن شمرده می

شود جابجا کنیم چنانکه همه نقطه‌های $(\overrightarrow{u})$ پابرجا بمانند و F' جای

نوین F باشد یابگفته دیگر اگر در دوپیکر برابر F و F' هر نقطه

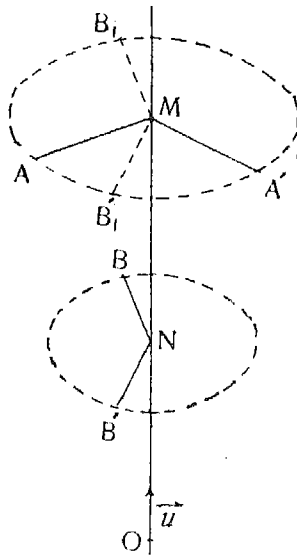
$(\overrightarrow{u})$ برهم پاسخ خود جاداشته باشد گوئیم F' **از چرخیدن** F گرد

($\overrightarrow{u}$) که آسه چرخه نامیده می‌شود پدیدآمده است و این جنبش را چرخه گویند و داریم $F = F'$

۴۹۰ - قضیه - اگر F گرد ($\overrightarrow{u}$) چرخیده باشد:

۱ - هر نقطه از F روی دائره‌ای که هامن آن بر ($\overrightarrow{u}$) ستونی بوده و مرکز آن نقطه بر خورد این هامن و ($\overrightarrow{u}$) است جابجا می‌شود.

۲ - اگر یک بیننده‌ای روی ($\overrightarrow{u}$) چنان بخوابد که سوی پا به سرش همان سوی $\overrightarrow{u}$ باشد (بیننده $\overrightarrow{u}$) می بیند. همه نقطه های F کمانهای برداری می‌پیمایند که گوشه‌های مرکزی سودار روبروی آنها باهم برابرانند.

برهان - اگر 'F از چرخیدن F گرد ($\overrightarrow{u}$) پدیدآمده و 'A

پ ۳۷۷

و 'B گردانده های دو نقطه دلخواه A و B از F باشند.

۱ ـ چنانچه M پای ستونی باشد که از A بر $(\overrightarrow{u})$ فرود آمده است چون گرداننده M روی خودجا دارد و داریم $F=F'$ پس MA' نیز بر $(\overrightarrow{u})$ ستونی بوده و خواهیم داشت .

$$MA=MA'$$

یا گفته دیگر A در هامنی که بر $(\overrightarrow{u})$ ستونی است جاداشته (قضیه ۳۰٤) و روی دائره بمرکز M و پرتو MA جا بجا شده است (پ ۳۷۷)

۲ ـ اگر N پای ستونی باشد که از B بر $(\overrightarrow{u})$ فرود آمده است و دونقطهٔ B_1 و B'_1 را از دائره(M) چنان بگیریم که $\overrightarrow{MB_1}$ و $\overrightarrow{NB}$ وهمچنین $\overrightarrow{MB'_1}$ و $\overrightarrow{NB'}$ بیك راستا و بیك سو شوند خواهیم داشت .

$$\widehat{BNB'}=\widehat{B_1MB'_1}$$ (قضیه ۲۹۸)

و برای بیننده $(\overrightarrow{u})$ خواهیم داشت

$$(\widehat{\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NB'}})=(\widehat{\overrightarrow{MB_1},\overrightarrow{MB'_1}})$$

رچوی گردانده‌های M و B_1 و A نقطه‌های M و B'_1 و A' می باشند وداریم $F=F'$ پس باید برای بیننده $(\overrightarrow{u})$ داشته باشیم

$$(\widehat{\overrightarrow{MB_1},\overrightarrow{MA}})=(\widehat{\overrightarrow{MB'_1},\overrightarrow{MA'}})$$

و از آنجا

$$(\widehat{\overrightarrow{MB_1},\overrightarrow{MA}})+(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB'_1}})=(\widehat{\overrightarrow{MB'_1},\overrightarrow{MA'}})+(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB'_1}})$$

ویا ازروی بستگی شال

$$(\widehat{\overrightarrow{MB_1},\overrightarrow{MB'_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}})$$

و در پایان

$$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}}) = (\widehat{\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NB'}})$$

۴۹۱ – قضیه وارون – اگر پیکر F را چنان بگردانیم (تبدیل کنیم) که همه نقطه‌های آن :

۱ ـ روی هامن هائی ستونی بر یك آسه ($\overrightarrow{u}$) جابجا شوند.

۲ ـ در این هامن‌ها روی دائره هائی که مرکزهایشان روی ($\overrightarrow{u}$) است کمانهای سوداری به پیمایند که گوشه های سودار مرکزی رو بروی آنها برای بیننده ($\overrightarrow{u}$) برابر باشند.

پیکری مانند F' برابر با F پدید میآید.

برهان – استوار کردن این قضیه آسان و بگردن دانش آموزان است.

۴۹۲ تعریف – گوشه سودار مرکزی روبروی کمان سوداری که یك نقطه در یك چرخه گرد ($\overrightarrow{u}$) میپیماید **گوشه سودار چرخه** نامیده میشود.

۴۹۳ – قضیه – اگر دو پیکر F و F' برابر یکدیگر باشند پیکر F' با یك فراروی و دو چرخه از پیکر F پدید آمده است.

برهان – اگر F و F' دو پیکر برابر و A و B دو نقطه دلخواه از پیکر F و A' و B' هم پاسخهای آنها از پیکر F' باشند.

نخست با یك فراروی به بردار $\overrightarrow{A'A}$ پیکر F' را گردانده و پیکر F'' را بدست میآوریم.

روشن است که F برابر با F″ بوده و نقطه A از F بر گرداننده خود از F″ جا خواهد داشت .

دوم : اگر نقطه B′ از پیکر F″ گرداننده نقطه B از F باشد داریم AB = AB″ پس پیکر F″ را پیرامون ($\vec{u}$) که در A بر هامن [ABB″] ستونی است باندازه ($\widehat{\overrightarrow{AB''},\overrightarrow{AB}}$) می چرخانیم تا F‴ بدست آید ، روشن است که دو پیکر F و F‴ برابر بوده و همه نقطه های خط AB از F روی گرداننده‌های خود از F‴ جاخواهندداشت .

سوم : چنانچه روی AB برداریکه‌ای مانند $\vec{v}$ بگزینیم می توانیم F را از چرخیدن F‴ گرد ($\vec{v}$) (از روی تعریف ۴۹۰) بدست آمده بدانیم .

۴۹۴ ـ اگر پیکر F در یك هامن π ستونی بر ($\vec{u}$) جاداشته باشد و O نقطه برخورد $\vec{u}$ با π باشد .

چرخه F گرد ($\vec{u}$) باندازه گوشه سودار $\hat{\theta}$ چرخه F گرد O باندازه گوشه سودار $\hat{\theta}$ نامیده می شود نقطه O را مرکز چرخه گویند .

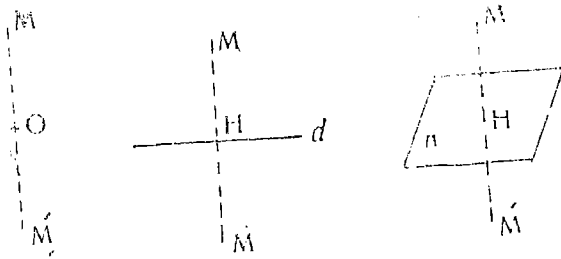
ج - همدوشی (قرینه)

۴۹۵ ـ **تعریف ۱** - دو نقطهٔ M و M′ را **همدوش** نسبت به :

الف ـ یك نقطه گویند اگر O میانگاه MM′ باشد .

ب ـ یك خط D گویند اگر MM′ بر D در نقطه H ستونی بوده و H میانگاه MM′ باشد .

ج ـ یك هامن π گویند اگر MM′ بر هامن π در نقطهٔ H ستونی بوده و H میانگاه MM′ باشد .

۲ - دو پیکر F و 'F را همدوش نسبت به یك نقطه و یك خط یا یك هامن گویند.

پ ۳۷۸

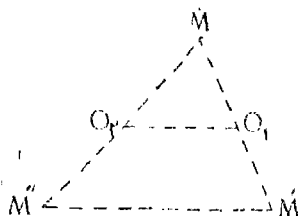
اگر همه نقطه‌های هم‌پاسخ آنها نسبت به یك نقطه یا یك هامن همدوش باشند.

۳۹۶ - قضیه - اگر دو پیکر F و 'F نسبت به خط D همدوش باشند و $\vec{u}$ بردار یکه‌ای روی D باشد میتوانیم F را با یك چرخه گرد ($\vec{u}$) و باندازه گوشه π روی 'F جادهیم.

برهان - استوار کردن این قضیه آسان و بگردن دانش آموزان است.

۴۹۷ - قضیه - دو پیکر 'F و ''F که همدوش پیکر F نسبت به دو نقطهٔ O_1 و O_2 یا نسبت به نقطه O و هامن π یا نسبت بهامن‌های π و 'Γ باشند باهم برابراند.

برهان ۱ - اگر 'M و ''M همدوش‌های نقطه M از F نسبت به O_1 و O_2 باشند چون درسه بر ''MM'M میانگاه های 'MM و

MM'' میباشند پس از روی (قضیه تالس) O_1O_2 با $M'M''$ همرو بوده

پ ۳۷۹

و داریم:

$$M'M'' = ۲O_1O_2$$

و از آنجا خواهیم داشت:

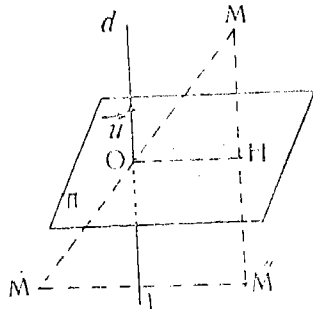
$$\overrightarrow{M'M''} = ۲\overrightarrow{O_1O_2}$$

پس از قضیه (۴۷۴) چنین بر می‌آید که پیکر F'' از فراروی پیکر F' باندازه $۲O_1O_2$ بدست آمده.

۲ ـ اگر M' همدوش M نسبت به‌نقطه O و M'' همدوش M نسبت بهامن π باشد چنانچه H پای ستون MM'' بر هامن π گرفته شود همیشه میتوان نقطه O را روی هامن π گرفت برای آنکه دو پیکر همدوش یك پیکر نسبت بدو نقطه چنانکه دیدیم باهم برابراند، چون درسه بر $MM'M''$ نقطه O میانگاه MM' میباشد پس اگر $(\overline{u})$ در نقطهٔ O ستون بر π باشد چون با $[MM']$ همرو است به $M'M''$ در نقطه I برمی‌خورد و از روی قضیه تالس داریم:

$$IM' = IM''$$

؛ چون MM'' همرو OH است (زیرا در سه بر $MM'M''$ نقطه‌های O

و H میانگاه‌های 'MM و "MM می‌باشند) ونیز ($\overrightarrow{u}$) بر OHستون

ب ۳۸۰

است پس بر "M'M نیز ستون خواهد بود . از آنجا بر می‌آید که 'M و "M نسبت به $\overrightarrow{u}$ قرینه اند پس از روی (قضیه ٦٩٦) پیکر "F از چرخیدن 'F گرد ($\overrightarrow{u}$) باندازه π بدست آمده وبا آن برابر است

۳ ـ اگر 'F و "F قرینه های F نسبت به دو هامن π و Γ باشند چنانچه O نقطه دلخواهی از فضا و '''F همدوش F نسبت باین نقطه باشد از آنچه که پیش گفتیم خواهیم داشت .

$$F'' = F''' \text{ و } F' = F'''$$

پس $F' = F''$

۴۹۸ - ورزش — استوار کنید که نسبت به نقطه O

الف — پیکر همدوش یك خط راست همرو با آنست .

ب — دو بردار همدوش یك جفت پدید می آورند .

ج — پیکر همدوش یك گوشه گوشه‌ای است برابر با آن

د — پیکرهمدوش یك‌هامن هامنی‌است همروآن

ه — پیکر همدوش یك دائره دائره‌ایست برابر با آن

و — پیکر همدوش یك گوشه دورو گوشه دو روئی برابر با آنست .

۲ — استوار کنید نسبت بیك هامن

الف — پیکر همدوش یك‌پاره خط پاره‌خطی برابر با آنست

ب — پیکر همدوش یك گوشه گوشه برابر با آنست

ج — پیکر همدوش یك گوشه دورو گوشه دوروی برابر با آنست

۵ — همسانی و همانندی

۴۹۹ — تعریف — چنانچه نقطه‌ای مانند S بنام **مرکز همسانی** وعددی جبری مانند k بنام **نسبت همسانی** داشته باشیم. همسان نقطه دلخواه M نقطه‌ای است مانند M' اگر داشته باشیم.

$$\frac{\overrightarrow{SM'}}{\overrightarrow{SM}}=k$$

همسانی را راسته گویند اگر نسبت همسانی بزرگتر از صفر (پ۳۸۱/الف) و وارون گویند اگر نسبت همسانی کوچکتر از صفر باشد (پ۳۸۱/ب)

الف S — — M — — — — M'

ب M — — S — — — — M'

پ ۳۸۱

روشن است در حال نخست داریم.

$$(SM)=(SM')$$

و در حال دوم داریم

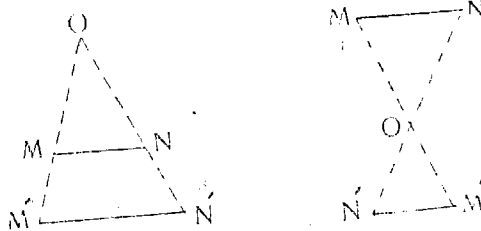
$$(SM)=-(SM')$$

دو پیکر F و F₁ را همسان یکدیگر گویند اگر همه نقطه های هم پاسخ آنها همسان یکدیگر باشند.

همسان مرکز همسانی بروی خود جادارد .

۵۰۰ - **قضیه** - اگر نسبت همسانی برابر با ۱- باشددو پیکر همسان نسبت به‌مرکز همسانی همدوش اند .

برهان - استوار کردن این قضیه بگردن دانش آموزان است

۵۰۱ - **قضیه** - اگر 'M و 'N از پیکر 'F دو نقطه‌همسان M و N از پیکر F در یك همسانی بمرکز O و نسبت k باشند دو بردار $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{M'N'}$ همرو بوده وداریم :

پ ۳۸۲

$$\frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}}=k$$

برهان - چون 'M هم پاسخ M و 'N هم پاسخ N درهمسانی بمرکز O ونسبت k میباشند داریم :

$$\frac{\overrightarrow{ON'}}{\overrightarrow{ON}}=k \quad \text{و} \quad \frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}}=k$$

پس خواهیم داشت :

$$\frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}}=\frac{\overrightarrow{ON'}}{\overrightarrow{ON}}$$

و یا

$$\frac{OM'}{OM}=\frac{ON'}{ON}$$

پس‌از روی (وارون‌قضیه‌تالس) برمی‌آید که دو خط [MN] و [M'N'] همروانند و از همانندی دو سه بر OMN و OM'N' خواهیم داشت :

$$\frac{M'N'}{MN}=|k|$$

یاداریم $k>0$ پس

$$(ON)=(ON')\ \text{و}\ (OM)=(OM')$$

ازاینرو پاره‌خط NN' به [MM'] در هیچ‌نقطه‌ای بر نمی‌خورد یابگفته دیگر N و N' دریك‌کنار [MM'] جا دارند (قضیه ۱۱ب) پس از روی (تعریف ۱۰۸) داریم ·

$$(MN)=(M'N')$$

یا داریم $k<0$ در اینجا چون

$$(ON)=-(ON')\ \text{و}\ (OM)=-(OM')$$

پس پاره خط NN' به [MM'] در نقطه O برمی‌خورد یابگفته دیگر N و N' در درون [MM'] جادارند و خواهیم داشت ·

$$(MN)=-(M'N')$$

ازاینرو برابری $\frac{M'N'}{MN}=k$ رارویهمرفته‌میتوانیم بدین گونه بنویسیم

$$\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}}=k$$

۵۰۲ - ورزش - استوار کنید :

۱ - پیکر همسان یك خط راست یك خط راست همرو با آن است .

۲ - پیکر همسان یك هامن هامن دیگری همرو با آن است .

۳ - همسان یك گوشه گوشه‌ای برابر با آن است .

٤ - همسان یك چندبر چندبری است همانند آن .

۵ - همسان یك دائره یك دائره است .

٦ - دو دائره (O) و ('O) که در یك هامن باشند هم پاسخ یکدیگر اند در دوهمسانی بمرکزهای C و 'C چنانکه داریم .

$$(CC'OO') = -1$$

و به نسبت های $k_1 = \frac{R'}{R}$ و $k_2 = -\frac{R'}{R}$

۵۰۳ - قضیه - اگر دو پیکر F و 'F داشته باشیم چنانکه هر نقطه‌ای از F دارای یك نقطه هم پاسخ در پیکر 'F باشد و بوارون و اگر M و N دو نقطه دلخواه از F و 'M و 'N نقطه های هم پاسخ آنها از 'F باشند و داشته باشیم

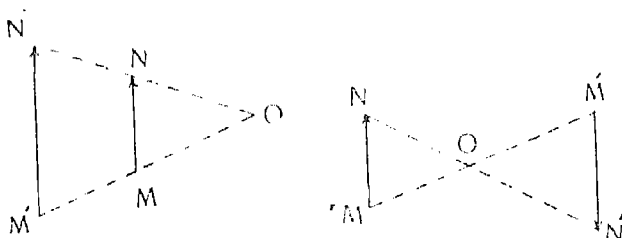
$$\frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}} = k \neq 1$$

دو پیکر F و 'F همسان اند :

برهان - چون داریم

$$\frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}} = k$$

پس خط [MN] همرو خط [M'N'] است (سنجش بردار های همرو) وچون $k \neq 1$ است پس [MM'] و [NN'] در یك نقطه مانند O بهم برمی‌خورند وبآسانی میتوان دید که این نقطه همواره پابرجا است و بستگی به برگزیدن نقطه‌های M و N ندارد پس درهمسانی

بمرکز O و نسبت $k=\frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}}$ دو پیکر F و F' هم‌پاسخ میشوند .

پ ۲۸۳

۵۰۴ – یادآوری – چون دریك همسانی بمرکز O و به‌نسبت k برای دو نقطه دلخواه هم‌پاسخ M و M' از دو پیکر F و F' داریم

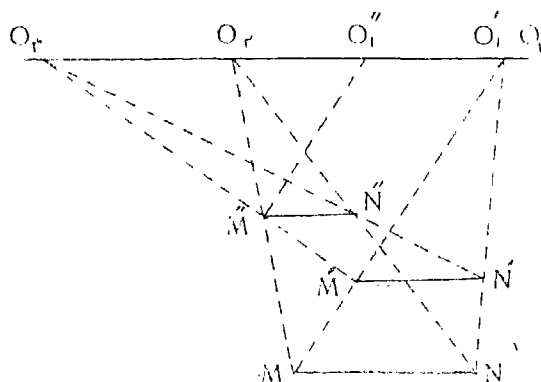
$$\frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}}=k$$

پس اگر k برابر با یك باشد یا M و M' روی هم جا دارند پس داریم F≡F'

یا M و M' روی‌هم جاندارند چون O روی خط MM' است ناچار دوری آن از M یا M' بی پایان خواهد بود پس پیکر F روی پیکر F' بایك فراروی باندازهٔ $\overrightarrow{MM'}$ جامی گیرد در هر دو حال میتوان گفت که اگر k برابر بایك باشد F' گرداندهٔ F است در یك فراروی یابگفته دیگر هنگامی که k برابر بایك باشد همسانی یك فراروی است .

۵۰۵ - قضیه – دو پیکر F' و F'' همسان یك پیکر F همسان یکدیگر اند و سه مرکز همسانی روی یك خط راست است .

برهان ـ اگر در همسانی بمرکز O_1 و نسبت k_1 دو پیکر F

پ ۳۸٤

و 'F هم پاسخ باشند برای هردو نقطهٔ دلخواه M و N از F دو نقطهٔ 'M و 'N خواهیم داشت از 'F چنانکه

$$\frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}}=k_1$$

و همچنین اگر در همسانی بمرکز O_2 ونسبت k_2 دو پیکر F و "F هم پاسخ باشند برای هردونقطهٔ دلخواه M و N از F دونقطهٔ "M و "N از "F خواهیم‌داشت چنانکه .

$$\frac{\overrightarrow{M''N''}}{\overrightarrow{MN}}=k_2$$

پس ازاین دوبرابری برمی‌آید :

$$\frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{M''N''}}=\frac{k_1}{k_2}=k_3$$

وازروی قضیه بالا دو پیکر F' و F'' همسان یکدیگر و مرکز همسانی O_3 نقطهٔ برخورد $[M'M'']$ و $[N'N'']$ است این نقطهٔ O_3 روی خط O_1O_2 جادارد زیرا میتوانیم همواره نقطه‌ای از خط O_1O_2 یا خود نقطه O_1 را نقطه‌ای از F دانسته وآنرا بجای نقطهٔ N بگیریم پس درهمسانی بانسبت k_1 وبمرکز O_1 هم‌پاسخ O_1 روی‌خود جادارد ودر همسانی به‌نسبت k_2 وبمرکز O_2 هم‌پاسخ O_1 نقطه‌ای است ازخط O_1O_2 مانند O''_1 پس O_3 نقطهٔ‌برخورد $|M'M''|$ با $|O_1O''_1|$ یا $|O_1O_2|$ خواهد بود (پ۳۸٤)

۵۰٦ — تعریف ــ دو پیکر را همانند گویند اگر یکی از آنها باهمسان راسته دیگری برابر باشد نسبت همسانی را دراینجا نسبت همانندی میگویند و چون دوپیکر برابر از روی (قضیه ٤۹۱) با یك جابجاشدن (یك فراروی ودوچرخه) روی هم‌جا میگیرند پس میتوان گفت همانندی ازیك جابجا شدن ویك همسانی پدید می‌آید از روی تعریف بالا برمی‌آید ۱ ــ اگر خواسته باشیم همانند پیکر F را بسازیم بسنده است که یك نقطه مانند O را مرکز وعددِ k را نسبت‌همسانی گرفته همسان‌پیکر F راکه F_1 می‌باشدبدست آوریم سپس F_1 را جابجا می‌کنیم تا بوضع F' درآید F' همانند F و نسبت همانندی همان k خواهد بود .

۲ ــ بجز چگونگی هائی که بستگی بوضع پیکرهای همسان دارند چگونگی های دیگر همسانی در همانندی پایدار میماند .

ازاینرو تعریف بالا باتعریفی که پیش برای همانندی چندبرها کردیم یکی است .

ورزشها

۱ — اگر در یك هامن π دو آسه $(\overrightarrow{u})$ و $(\overrightarrow{v})$ داشته باشیم که دارای یك خاستگاه باشند استوار کنید .

الف — برای هر نقطه M از هامن π تنها دو عدد جبری x و y میتوانیم پیدا کنیم چنانکه داشته باشیم .

$$\overrightarrow{OM} = x \times \overrightarrow{u} + y \times \overrightarrow{v}$$

ب — برای هر دو عدد جبری x و y تنها یك نقطه M میتوان از هامن π چنان یافت که بستگی بالا درست باشد (x و y را همارا های نقطه M نسبت به دستگاه همارا های $O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ در هامن π گویند)

۲ — اگر $(\overrightarrow{u})$ و $(\overrightarrow{v})$ و $(\overrightarrow{w})$ سه آسه دارای یك خاستگاه O باشد که در یك هامن جا نداشته باشند استوار کنید .

الف — برای هر نقطه M تنها سه عدد جبری x و y و z میتوانیم پیدا کنیم چنانکه داشته باشیم .

$$\overrightarrow{OM} = x \times \overrightarrow{u} + y \times \overrightarrow{v} + z \times \overrightarrow{w}$$

ب — برای سه عدد جبری x و y و z تنها یك نقطه M میتوان چنان یافت که بستگی بالا درست باشد (x و y و z را همارا های M نسبت به دستگاه های همارا ها $o, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ گویند)

۳ — دو بردار چنان پیدا کنید که دارای راستاهای ستونی برهم بوده و بزرگی آنها رویهم برابر با عدد a و بر آیند آنها نیز یك بردار داده شده $\overrightarrow{R}$ باشد.

٤ — اگر G نقطه برخورد میانه‌های سه‌بر A B C بر آیند سه بردار $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GB}$ و $\overrightarrow{GC}$ را بدست آورید .

٥ — استوار کنید سه برداری که جایگاه آنها بر پهلوهای سه بر A B C در

میانگاه‌های این پهلوها ستونی بوده و بزرگی آنها برابر با این پهلوها باشد دارای برآیند برابر باصفر اند

۶ — اگر M نقطه و A B C سه‌بری دلخواه دریك هامن باشد و G نقطهٔ برخورد میانه‌های سه بر ABC گرفته شود استوار کنید همواره داریم :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=۳\overrightarrow{MG}$$

۷ — اگر چهار نقطه A و B و C و D دریك‌هامن نباشند و E و F میانگاه‌های AC و BD باشندهمواره‌داریم :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=۲\,\overrightarrow{EF}$$

۸ — اگر چهارنقطه A و B و 'A و 'B روی $(\overrightarrow{u})$ باشندو M میانگاه 'AA و N میانگاه 'BB باشداستوار کنیدهمواره داریم :

$$\overline{MN}=\frac{\overline{AB}+\overline{A'B'}}{۲}=\frac{\overline{AB'}+\overline{A'B}}{۲}$$

۹ — اگر ABC سه‌بر راست با (AB=AC) و (O) دائره ای سایا در B و C بر |AB| و |AC| باشد و خطی که از A بر پای BC ستونی است در D و E بدائره(O) و در H به BC برخورد استوار کنید چهار نقطه D و E و A و H یك‌بخش همساز پدید میاورند .

۱۰ — اگر دوزه دلخواه AB و BC از یك دائره (O) داشته باشیم استوار کنید نقطه های برخورد [AB]و [AC] بامیان برستون‌بر [BC] و دوسر همین میان بریك بخش همساز درست میکنند .

۱۱ — اگر چهار نقطه A و B و M و N روی $(\overline{u})$ یك بخش همساز پدید آورده باشند۱ — =(ABMN) و نقطه p میانگاه MN باشد همواره خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BM}\cdot\overline{BN}}=۰$$

۱۲ — روی $(\overset{\frown}{u})$ نقطه های A و A' و B و B' و C و C' و M و N چنان گرفته شده‌اند که داریم :

$$(AA'MN)=(BB'MN)=(CC'MN)=-1$$

استوار کنید همواره خواهیم داشت :

$$\overline{AB'}\cdot\overline{BC'}\cdot\overline{CA'}=\overline{AC'}\cdot\overline{BA'}\cdot\overline{CB'}$$

۱۳ — دریك هامن دائره (O) ودو نقطه A و B داده‌شده‌اند از A و B دائره ای چنان بگذرانید که بردائره (O) دردو نقطه میان بری آن بربخورد .

۱٤ — دائره (O) و دو نقطه A و B در یك هامن داده شده‌اند می‌خواهیم در این هامن از A و B دائره‌ای بگذرانیم که به دائره (O) دردو نقطه C و D برخورده واندازه درازای پاره خط CD برابر باعدد داده شده l باشد .

۱۵ — سه نقطه A و B و C داده شده‌اند از دو نقطه A و B دائره‌ای چنان بگذرانید که اگر از C سایائی بر آن بکشیم و T نقطه همسائی باشد اندازه درازای CT برابر با عدد داده شده گردد .

۱٦ — دو نقطهٔ A و B و دائره (O) دریك هامن داده‌شده‌اند از این دو نقطه دائره‌ای راست گذر بردائره (O) بگذرانید .

۱۷ — سه نقطه A و B و C وسه عدد a و b و c داده‌شده‌اند دائره‌ای چنان‌در هامن این سه‌نقطه بکشید که اگرازاین سه نقطه برآن سایاهائی بکشیم و R و S و T نقطه های همسائی باشند داشته باشیم :

$$AR=a \text{ و } BS=b \text{ و } CT=c$$

۱۸ — دو دائره (O) و (O') ونقطه A دریك هامن داده شده‌اند از نقطه A دائره‌ای بگذرانید که بردودائره (O) و (O') راست گذر باشد .

۱۹ — دائره‌ای بکشید که برسه دائره داده شده دریك هامن راست گذرباشد.

۲۰ — یك دائره (O) و دو نقطه A و B در هامن آن داده‌شده‌اند ازنقطه A

خط دلخواهی می کشیم که بدائره (O) در M و N بر بخورد استوار کنید دائره‌ای که بر M و N و B میگذرد همیشه از یك نقطه پابرجا نیز خواهد گذشت .

۲۱ — استوار کنید جای هندسی نقطه‌هائی که نسبت توانهای آنها نسبت بدو دائره داده شده (O) و (O') از یك هامن برابر با یك عدد k است دائره‌ای می‌باشد که با دائره (O) و (O') دارای یك آسه بنیادی است .

۲۲ — اگردر هامن سه‌بر ABC خطی همرو با [BC] که پهلوهای AB در D و AC در E بر بخورد استوار کنید آسه‌بنیادی دو دائره که بمیان‌برهای BE و CO کشیده شوند خطی‌است که از A گذشته‌و بر [BC] ستونی‌است.

۲۳ — اگر دو دائره (O) و (O') در یك هامن داشته باشیم و (O'') یك دائره راست گذر بر آنها باشد :

۱ — در چه حال (OO') بدائره (O'') برمیخورد :

۲ — اگر (OO') بدائره (O'') در دو نقطه p و p' بر بخورد هر دائره دیگرراست گذر به O و O' نیزاز p و p' خواهد گذشت.

۲٤ — چهار نقطه A و B و C و D روی یك خط راست جا دارند از A و B یك دائره دلخواه و برنده با دائره نخست میگذرانیم استوار کنید آسه بنیادی این دائره همیشه از یك نقطه پابرجامی گذرد .

۲۵ — میخواهیم یك هامن‌راباچندبرهای بائین (منتظم) فرش کنیم استوار کنید که‌تنها باسه گونه چندبر با ئین میتوان اینکار را انجام داد .

۲٦ — یك پنج بر بائین را که یك پهلوی آن در دست‌است بسازید.

۲۷ — استوار کنید اگر روی هر یك از پهلوهای یك شش‌بر بائین از بیرون آن شش خشتی بسازیم دوازده تارك های دیگر این خشتی‌ها تارکهای یك دوازده بر بائین می‌باشند .

۲۸ — پرتو دائره‌ای را بدست آورید که در روی آن کمان ۱۵° و ۱۸° دارای اندازه درازی ۲ میباشد

۲۹ — اگر A نقطه‌ای از دائره (O) باشد و به میان بر AO دراین هامن دائره (O') را بکشیم چنانچه B و C نقطه‌های بر خورد دائره (O) و دائره (O') با یك خط دلخواهی که از O میگذرد باشند استوار کنید که کمانهای AB و AC دارای یك درازا می‌باشند .

۳۰ — A و B دو نقطه داده شده و C نقطه دلخواهی از دائره (O) میباشند جای هندسی انجام برآیند دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را بدست آورید .

۳۱ – از یك چهاربر چهار گوشه و دو پهلوی روبرو داده شده می‌خواهیم این چهار بر را بسازیم .

۳۲ — پاره‌خطی براستا ودرازای داده شده چنان بکشید که دوسر آن روی دوخط راست یاروی یك خط راست ویك دائره ویاروی دودائره داده‌شده جاداشته باشد.

۳۳ — درچهاربر ABCD داریم $AB = BC$ استوار کنیدخطی که ازمیانگاه های دو پهلوی AB و CD می گذرد همرو بانیمساز گوشه‌ایست که دو پهلوی AD و BC باهم درست میکنند .

۳۴ – اگر M' گردانده M درچرخه گرد مرکز C وباندازه $\widehat{\theta}$ و M' گردانده M' درچرخه گرد C' و باندازه $\widehat{\theta}$ باشنداستوار کنید M'' گردانده M دریك فراروی است .

۳۵ — دریك هامن‌دوخط راست d و d' یایك خط راست d و یك دائره (O) یادو دائره (O) و (O') و یك نقطه A داده شده است می‌خواهیم سه‌بر راست پهلوی ABC را چنان بسازیم که تارکهای B و C آن روی d و d' یاروی d و (O) یا روی (O) و (O') باشد .

۳۶ — اگرخط راست d' گردانده‌خط راست d دریك‌چرخه گرد O باندازه θ باشد دائره‌ای که از O واز دو نقطه M و M' از d و d' (گردانده‌هم) می گذرد همواره از یك نقطه پابرجا خواهد گذشت .

۳۷ — A و B دو نقطه از یك دائره می باشند و M نقطه دلخواهی است از کمان $\widehat{AB}$ این دائره است روی خط راست $[BM]$ نقطه M' را چنان می گیریم که داشته باشیم $AM = BM'$ می‌خواهیم جای هندسی نقطهٔ M' را بدست آوریم .

۳۸ — روی یك دائره داده‌شده کمانی بدرازای داده شده چنان پیدا کنید که اگر از دو نقطه داده‌شده درهامن این دائره به دوسر این کمان بپیوندیم دوخط همرو پدید آیند .

۳۹ — یك‌سه‌بر راست پهلو چنان بسازید که تارکهای آن روی سه خط همرو یاروی سه دائره بیك مرکز جاداشته باشد .

۴۰ — چهار نقطهٔ A و B و A' و B' چنان‌داده شده اند که داریم $AB = A'B'$ چرخه‌ای پیدا کنید که A را به A' و B را به B' بگرداند .

۴۱ — چهار نیم خط بسر O مانند Ox و Oy و Ox' و Oy' چنان داده شده‌اند که داریم .

$$\widehat{x'Oy'} = \widehat{xOy}$$

آنچه چرخه‌ای که Ox را به Ox' و Oy را به Oy' می گرداند پیدا کنید .

۴۲ — دو پیکر F' و F'' همدوش یك پیکر F نسبت بدو هامن π_1 و π_2 میباشند چگونه میتوان F' را جابجا نموده روی F'' جاداد .

۴۳ — دو پیکر F' و F'' همدوش یك پیکر F نسبت بیك هامن π و یك نقطه O (که در بیرون π جادارد) میباشند چگونه میتوان F' را جابجا نموده روی F'' جا داد .

۴۴ — نقطه‌های دو پیکر F و F' همپاسخ‌اند چنانکه اگر A و B و C سه نقطه دلخواه از F و A' و B' و C' سه نقطه همپاسخ آنها از F' باشند داریم :

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$

استوار کنید F همانند F' یاهمانند همدوش آن میباشد .

۴۵ — دو پیکر همانند (نابرابر) را میتوان با یك چرخه و یك همسانی راسته (نسبت بمرکز C که روی آسه چرخه جادارد) روبهم جاداد.

۴۶ — دو دائره (O) و (O') از یك هامن در A سایا می‌باشند از نقطه A دو خط برنده میگذرند که یکی از آنها این دو دائره را در نقطه های M و M' و دیگری این دودائره را در نقطه‌های N و N' میبرد استوار کنید چنانچه MN همیشه سایا بایك دائره (O'') باشد M'N' نیزهمواره سایا بدائره دیگری خواهد بود.

۴۷ — سه نقطه A و B و C روی یك خط d جا دارند از نقطه A خط دلخواهی مانند g می گذرد و B' و C' تصویر های B و C روی g می‌باشند میخواهیم جای هندسی نقطه برخورد گوشه برهای زنخی BB'CC' را بدست آوریم

۴۸ — استوار کنید ستونهائیکه از مرکزهای دائره های‌محاطی بیرونی سه بر ABC در گوشه های A و B و C بر [BC] و [CA] و [AB] فرود می‌آیند همرس اند.

۴۹ — سه‌بر ABC و یك نقطه P در یك هامن داده شده‌اند استوار کنید سه خطی که از میانگاه های D و E و F پهلوهای BC و CA و AB این سه‌بر همرو [AP] و [BP] و [CP] کشیده شوند همرس‌اند.

۵۰ — سه نقطه A و B و C روی یك خط راست جا دارند روی دائره C بمرکز C و پرتو CA دونقطه میان بری M و M' دلخواه میگیریم میخواهیم جای هندسی نقطه برخورد [AM] و [BM] را بدست آوریم.

فهرست